

Ficha 13 — Função afim: declive, zeros, sinal e monotonia

10.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Reconhecer a forma $f(x) = a \cdot x + b$, calcular o declive (dois pontos ou função), a ordenada na origem, os zeros; determinar o sinal e discutir a monotonia — graficamente e analiticamente.

Revisão rápida — $f(x) = a \cdot x + b$ numa página

- **Forma:** $f(x) = a \cdot x + b$ (grau 1) $\leftrightarrow$ gráfico = **reta**. Domínio: todo $\mathbb{R}$ (exceto contexto).
- **a = declive** = inclinação da reta = «quanto sobe y por cada 1 de x»: $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \Delta y/\Delta x$. $a > 0 \rightarrow$ **reta crescente** · $a < 0 \rightarrow$ **decrecente** · $a = 0 \rightarrow$ **horizontal** (constante).
- **b = ordenada na origem** = valor de $f(0)$ = onde a reta corta o eixo OY.
- **Zero:** x_0 com $f(x_0) = 0 \rightarrow x_0 = -b/a$ — é a **corte com OX** e é onde a função *muda de sinal*.
- **Sinal:** resolve $a \cdot x + b \geq 0 \rightarrow$ se $a > 0$: positiva à direita do zero; se $a < 0$: positiva à *esquerda* (o sinal «inverte» com a negativo).
- **Monotonia (analítica):** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1)$ — sinal do resultado = sinal de a.

f(x)	a	b	Zero	Monotonia
$2x - 6$	2	-6	3	crescente
$-x + 4$	-1	4	4	decrecente
7	0	7	— (nenhum)	constante

Exercícios

1. Define função afim (forma geral) e a ligação «grau 1 $\leftrightarrow$ reta». Dá 2 exemplos contextuais (com taxa fixa).

2. Em $f(x) = -2x + 5$: a) $a = ______$ $b = ______$ b) interpreta a e b no gráfico (2 frases) c) cresce ou desce? $______$

3. Declive entre pontos: reta por (1, 3) e (4, 12): a) $\Delta y ______ \Delta x ______$ b) $a = ______$ c) equação com $b = -1$: $f(x) = ______$

4. Construir f: $a = 2$ e a reta passa por (3, 7): $b = 7 - 2 \cdot 3 = ______ \rightarrow f(x) = ______$ · verifica $f(3) = ______$

5. Zeros: $f(x) = 3x - 12$: a) zero ___ b) este zero é a interseção com que eixo? ___ c) $g(x) = 7$ (constante): zero ___ — porque?

6. Sinal: $f(x) = -2x + 8$: a) resolve $-2x + 8 > 0 \rightarrow x$ ___ b) e < 0 ? ___ c) confirma no gráfico: onde é que a reta está «acima» de OX? ___

7. Monotonia (analítica): prova que, se $a > 0$, f cresce: começa por $f(x_2) - f(x_1) =$ ___ e conclui o sinal ___ para $x_1 < x_2$.

8. Gráfica: reta por $(0, 2)$ e $(4, -2)$: a) $a =$ ___ $b =$ ___ b) escreve f ___ c) zero ___ d) sinal: $f > 0$ para x ___ e) monotonia ___

9. Contexto: aluguer de um carro: $\text{custo}(x) = 15 + 2,5x$ ($x = \text{km}$). a) $b =$ ___ (custo de que?) b) $a =$ ___ (custo de quê?) c) custo de 40 km ___ d) o zero seria $x = -6$ — porque é que não faz sentido prever aí? (domínio)

10. Encontro de retas: $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -x + 8$. a) iguala: $2x - 1 = -x + 8 \rightarrow x = __$ b) $y = __$ c) o ponto (3, 5) significa, numa frase de contexto (ex.: dois tarifários).

11. Algoritmo (Python):

```
def f(x): return -2*x+8
xs=[0,2,4,6]
print([f(x) for x in xs])
```

a) lista impressa $__$ b) em que x a função é nula? $__$ c) altera para $-2x + 3 \rightarrow$ nova lista $__$ — que efeito tem $+b$ no gráfico?

12. Decisão: plano telemóvel A: 15 € fixos ilimitado · plano B: 5 € + 0,20 €/GB. a) encontro: $15 = 5 + 0,2x \rightarrow x = __$ GB b) para 30 GB: A = $__$ B = $__ \rightarrow$ qual? c) para 60 GB: A = $__$ B = $__ \rightarrow$ qual? — escreve a regra geral (2 razões + 1 contra).

Soluções — Ficha 13: Função afim

1. *Função afim*: $f(x) = a \cdot x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (se $a = 0$: constante) — associada ao **grau 1** $\leftrightarrow$ gráfico é uma **reta**. Exemplos: custo de táxi 3,50 € + 0,80 €/km; tarifa de água 8 € (fixo) + 1,40 €/m³.

2. a) $a = -2 \cdot b = 5$ b) $a = -2$: a cada +1 em x , f desce 2 (reta inclinada para baixo, sobe da direita para a esquerda) $\cdot b = 5$: a reta corta OY em (0, 5) — valor inicial c) **decrecente** ($a < 0$).

3. a) $\Delta y = 12 - 3 = 9 \cdot \Delta x = 4 - 1 = 3$ b) $a = 9/3 = 3$ c) com $a = 3$ e $b = -1$: **$f(x) = 3x - 1$** (retas com o mesmo declive mas outra altura — esta não passa pelos dois pontos; a que passa é $f(x) = 3x$, pois $3 = 3 \cdot 1 + b \rightarrow b = 0$).

4. $b = 7 - 6 = 1 \rightarrow f(x) = 2x + 1$ $\cdot$ verificação: $f(3) = 6 + 1 = 7$ ✓.

5. a) $3x = 12 \rightarrow x = 4$ ($f(4) = 0$) b) corte com o **eixo OX** (ponto (4, 0)) c) nenhum zero — a reta $y = 7$ é paralela a OX (nunca o corta: $7 = 0$ é impossível).

6. a) $-2x > -8 \rightarrow$ dividindo por -2 (inverte): $x < 4$ b) $x > 4$ c) a reta está acima de OX à **esquerda** de $x = 4$ — coerente: com $a < 0$, a função é positiva antes do zero.

7. $f(x_2) - f(x_1) = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) = a \cdot (x_2 - x_1)$ $\cdot$ como $x_1 < x_2 \rightarrow (x_2 - x_1) > 0$ e $a > 0 \rightarrow$ produto $> 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1) \rightarrow$ **f é crescente**.

8. a) $a = (-2 - 2)/(4 - 0) = -4/4 = -1 \cdot b = 2$ (corta OY em (0, 2)) b) $f(x) = -x + 2$ c) $-x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$ d) $f > 0$ para $x < 2$ e) **decrecente**.

9. a) 15 € = custo **fixo** (independente dos km — ex.: seguro/diária) b) 2,50 € = custo por **km** c) $15 + 2,5 \cdot 40 = 115$ € d) o modelo só é válido para **$x \geq 0$** (não há km negativos) — a reta matemática existe, mas o *contexto* restringe o domínio; extrapolar para -6 km não significa nada.

10. a) $2x + x = 8 + 1 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$ b) $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ c) no ponto (3, 5) os dois tarifários **custam o mesmo** (5 € por 3 unidades de consumo) — é a fronteira: abaixo disso um é mais barato, acima o outro.

11. a) $f(0) = 8, f(2) = 4, f(4) = 0, f(6) = -4 \rightarrow$ **[8, 4, 0, -4]** b) $x = 4$ (valor 0) c) **[3, -1, -5, -9]** — b maior desloca a reta **para cima** (mesmo declive, ortogonal).

12. a) $0,2x = 10 \rightarrow x = 50$ GB b) $A = 15 \cdot B = 5 + 6 = 11 \rightarrow$ **B** c) $A = 15 \cdot B = 5 + 12 = 17 \rightarrow$ **A** $\cdot$ regra: até 50 GB $\rightarrow$ B, acima $\rightarrow$ A. Razões: 1) B começa -4 € mais barato 2) o encontro exato (50 GB) torna a decisão objetiva — não é achismo $\cdot$ contra: se o consumo oscilar muito (um mês 60, outro 30), o plano fixo A dá **previsibilidade** (sem surpresas) — perde-se a poupança do B nos meses leves.