

Ficha 1 — Modelos matemáticos nas eleições

10.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Distinguir maioria simples e maioria absoluta, aplicar o método de Borda, compreender a transitividade das escolhas e o papel dos métodos eleitorais — incluindo leitura de um algoritmo em Python (pensamento computacional).

Revisão rápida

- **Maioria simples (pluralidade):** vence quem tem *mais votos que qualquer outro* — mesmo com minoria (ex.: 35% com 3 candidatos).
- **Maioria absoluta:** é preciso **mais de metade** dos votos válidos: $ma = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ ($n = n^\circ$ de votos válidos). Sem ela, há 2.ª volta (caso da eleição presidencial de 1986 — Soares 51,2% vs. Freitas do Amaral 48,8%, decidida na 1.ª volta por raspar os 50%).
- **Método de Borda:** boletins de *preferência* (ordenação) — cada posição vale pontos (último = 0, penúltimo = 1, ...); vence quem soma **mais pontos**.
- **Transitividade:** $A > B$ e $B > C \implies A > C$. Se $A > B$, $B > C$ e $C > A$, há **ciclo** (paradoxo de Condorcet) — a escolha coletiva não está definida. **Métodos diferentes podem eleger vencedores diferentes com os mesmos votos.**

Exercícios

1. Define maioria simples e maioria absoluta e dá um exemplo numérico de cada uma (com 3 candidatos).

2. Numa assembleia com $n = 850$ votos válidos: a) quantos votos garantem a maioria absoluta? b) o candidato A teve 421 votos — eleito? Justifica com % (2 casas).

3. Eleição de delegado: $A = 174$ votos, $B = 168$, $C = 128$ ($n = 470$). a) vencedor por *maioria simples* __ b) maioria absoluta necessária: __ — algum candidato a atingiu? __

4. Caso PR 1986: Soares 51,2% · Freitas do Amaral 48,8%. a) por que razão este sistema *valoriza* a 2.ª volta? b) em 1986 ela não se realizou — porquê? c) que teria acontecido com 49,8% vs. 48,8% e 1,4% de terceiro candidato?

5. Método de Borda — princípios: a) que boletim usa? b) como atribuir pontos a 3 candidatos (1.º, 2.º, 3.º)? c) por que é que dá *preferência* ao consenso vs. ao radical?

6. Borda — cálculo: 4 eleitores classificam 3 candidatos (X, Y, Z):
 E1: $X > Y > Z$ · E2: $X > Y > Z$ · E3: $Y > Z > X$ · E4: $Z > Y > X$ (pontuação 2/1/0 por posição).
 Calcula os pontos de X _ Y _ Z _ → vencedor: _ (2 pts por posição).

7. Transitividade: a) define b) um eleitor tem preferências $A > B$, $B > C$ — que relação se infere? c) *ciclo*: $A > B$, $B > C$, $C > A$ — o que acontece à escolha coletiva? (1 frase)

8. Método ≠ resultado: com os votos do ex. 3 ($A=174$, $B=168$, $C=128$) — propõe uma ordenação de Borda em que *C* fique à frente de *A*; o que isto mostra sobre a escolha do método?

9. Algoritmo (Python): lê o programa e responde:

```
cA=270
cB=153
cC=201
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```

a) valor impresso: _ b) algum candidato tem maioria absoluta? _ c) acrescenta (em palavras) a condição que verificaria isso.

10. Tabela de preferências: Associação de Estudantes, 300 sócios — sondagem: 40% $X > Y > Z$ · 35% $Y > X > Z$ · 25% $Z > Y > X$. a) nº de votos de cada ordem __ b) vencedor por maioria simples (primeiro preferido) __ c) vencedor por Borda (2/1/0) __ — coincidem? __

11. Contexto real: Eleição para a direção de um clube: 1 042 votos válidos. a) maioria absoluta: __ votos b) o líder tem 512 — quantos lhe faltam? __ c) se a regra fosse maioria simples, seria eleito? __

12. Produção: A tua turma vai eleger delegado — escolhe UMA regra (maioria simples, absoluta ou Borda) e justifica em 3 frases: 2 razões a favor (com exemplo numérico) e 1 limitação do método escolhido.

Soluções — Ficha 1: Modelos matemáticos nas eleições

1. *Maioria simples*: mais votos que qualquer concorrente (ex.: 35% com A=35, B=33, C=32 vence sem chegar a 50%). *Absoluta*: mais de metade dos válidos (ex.: 51% de 100 = 51 votos).

2. a) $ma = \lfloor 850/2 \rfloor + 1 = 426$ votos b) A: $421/850 = 49,53\% < 50\% \rightarrow$ **não** (tem maioria simples, não absoluta).

3. a) A ($174 > 168 > 128$) b) $ma = \lfloor 470/2 \rfloor + 1 = 236$ — **ninguém** (A tem $174 < 236$) $\rightarrow$ 2.ª volta A vs. B.

4. a) obriga a uma base alargada $> 50\%$ — legitimidade de governação b) Soares superou 50% (51,2%) na 1.ª volta $\rightarrow$ o sistema dispensou a 2.ª c) sem maioria absoluta, 2.ª volta entre os dois primeiros (49,8% vs. 48,8%) — o 3.º candidato elimina-se, mesmo decidindo o desfecho.

5. a) boletim de *ordenação* completa dos candidatos b) 1.º = 2 pts $\cdot$ 2.º = 1 pt $\cdot$ 3.º = 0 pts c) quem é 2.º em muitos boletins acumula pontos — premia ampla aceitação (consenso), não só o voto polarizado.

6. X: $2+2+0+0 = 4$ $\cdot$ Y: $1+1+2+1 = 5$ $\cdot$ Z: $0+0+1+2 = 3 \rightarrow$ vencedor **Y** — Y soma 5 porque é 2.º em três boletins e 1.º num: vence pelo consenso, mesmo com X a liderar as primeiras escolhas.

7. a) relação de preferência coerente: se $A > B$ e $B > C$, então $A > C$ b) **A > C** c) o ciclo ($A > B > C > A$) torna a escolha coletiva **indeterminada** — nenhum candidato é preferido a todos os outros (paradoxo de Condorcet).

8. (modelo) Ordenações com as mesmas primeiras escolhas (A=174, B=168, C=128): $174 \times (A > B > C) \cdot 168 \times (B > C > A) \cdot 128 \times (C > B > A) \rightarrow$ Borda (2/1/0): A = 348, B = 638, C = 424 $\rightarrow$ apesar de A ter mais 1.ª escolhas, **C ultrapassa A** ($424 > 348$). Conclusão: **o método eleitoral determina o vencedor** — é uma escolha política, não um detalhe técnico.

9. a) $ma = \text{int}(624/2)+1 = 313$ b) **não** — $270 < 313$ (nem 201 nem 153) c) (modelo) `if cA>=ma: print("A vence") elif cB>=ma: ... else: print("sem maioria absoluta")`.

10. a) $40\% = 120 \cdot 35\% = 105 \cdot 25\% = 75$ b) 1.º preferido: X=120, Y=105, Z=75 $\rightarrow$ **X** (maioria simples) c) Borda: X = $120 \cdot 2 + 105 \cdot 1 + 75 \cdot 0 = 345$ $\cdot$ Y = $120 \cdot 1 + 105 \cdot 2 + 75 \cdot 1 = 375$ $\cdot$ Z = $120 \cdot 0 + 105 \cdot 1 + 75 \cdot 2 = 260 \rightarrow$ **Y** — **não coincidem**.

11. a) $\lfloor 1042/2 \rfloor + 1 = 522$ b) $522 - 512 = 10$ votos c) **condicionado**: com maioria simples vence quem tiver mais votos — 512 garante a vitória se nenhum outro candidato tiver ≥ 512 (os restantes 530 poderiam reunir-se num só; sem os votos dos outros não se fecha).

12. (modelo) Escolho **maioria absoluta**: 1) exige apoio de mais de metade da turma — decisões com legitimidade (ex.: 236 de 470) 2) evita vencer com minoria (35% seria frágil) $\cdot$ limitação: pode obrigar a 2.ª volta (custo/tempo) — ou Borda premia consenso mas é mais difícil de contar.