

Ficha — Variável aleatória e f.m.p.: dois números que resumem o fenómeno

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Associar números aos resultados de um fenómeno (variável aleatória), construir e ler a **função massa de probabilidade** de suporte finito, calcular **valor médio** μ e **desvio padrão** σ populacionais e relacioná-los com $\bar{x}$ e s da amostra.

Revisão rápida

Variável aleatória (v.a.) X = função que atribui um **número** aos resultados de um fenómeno (o dado $\rightarrow$ nº de pintas; a extração $\rightarrow$ nº de vermelhas). Construir um modelo para espaço **finito** = construir a **função massa de probabilidade (f.m.p.)**: tabela $x_i \mid p_i$ com

$$p_i = P(X = x_i) \geq 0 \text{ e } \sum p_i = 1$$

Dois parâmetros da população (letras gregas):

$$\mu = E(X) = \sum x_i \cdot p_i \quad \sigma = \sqrt{(\sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i)}$$

Leitura	O que diz
Valor médio μ (miu)	onde se concentra — o resultado «típico» a longo prazo (média ponderada)
Desvio padrão σ (sigma)	quanto se espalha em torno de μ — dispersão/risco típico

Paralelo **população** $\leftrightarrow$ **amostra** (o mesmo em letras latinas): $\mu \leftrightarrow \bar{x} \cdot \sigma \leftrightarrow s$ — os parâmetros são **fixos da população**; as estatísticas **dependem da amostra** (fichas 10–12).

Cuidado: os resultados **não têm de ser equiprováveis** — a soma de dois dados tem 11 valores possíveis mas probabilidades de 1/36 a 6/36 (não é «1/11»!).

Estratégia: escrever S e $X \rightarrow$ listar x_i com $p_i \rightarrow$ conferir $\sum p_i = 1 \rightarrow$ calcular μ (e σ se pedirem) $\rightarrow$ **interpretar** (concentração e dispersão).

Exercícios

1. Completar: a v.a. atribui _____ aos resultados de um fenómeno · na f.m.p., $p_i =$ _____ e a soma das p_i é sempre _____ · $\mu = \sum$ _____ · σ mede a _____ em torno de μ .

2. Dado equilibrado: escreve a f.m.p. de $X =$ nº de pintas (probabilidade de cada face) e calcula μ com a fórmula $\sum x_i p_i$ — interpreta o valor 3,5 (alguma face tem 3,5 pintas?).

3. Desvio padrão do dado: com $\mu = 3,5$, monta a tabela $\sum (x_i - 3,5)^2 \cdot (1/6)$ e calcula σ ($\approx 1,71$). (a) O que significa $\sigma \approx 1,71$ na prática? (b) Se um dado «tipo dado truque» quase só desse 6, o que aconteceria a μ e a σ ?

4. Soma de dois dados: X = soma das pintas. (a) Constrói a f.m.p. (de 2 a 12) com denominador 36 e confirma $\sum p_i = 1$. (b) Calcula $P(X = 7)$ e $P(X \geq 10)$. (c) Porque é errado dizer que há «11 resultados com probabilidade $1/11$ »?

5. Extração sem reposição: saco com 3 vermelhas e 2 azuis; X = nº de vermelhas em 2 extrações. (a) Lista os valores de X e calcula $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ (soma = 1). (b) Calcula μ e σ (dica: $\mu = 1,2$; $E(X^2) = 1,8$).

6. Paralelo população/amostra: explica — (a) porque μ e σ são parâmetros (gregos) e $\bar{x}$ e s são estatísticas (latinos)? (b) num exemplo concreto (altura de uma turma), o que é fixo e o que muda de amostra para amostra?

7. Acontecimentos com uma v.a.: com a f.m.p. do ex. 4 (dois dados), calcula $P(X \leq 4)$, $P(5 \leq X \leq 7)$ e $P(X \text{ é par})$ — mostrando que acontecimentos são somas de p_i das linhas correspondentes.

8. Valor médio como «longo prazo»: num jogo, paga-se 10 € para jogar com dados e recebe-se o valor das pintas $\times 2$ €. (a) Quanto se recebe em média por jogo ($\mu \times 2$)? (b) O jogo é justo? Porque é que μ responde sem simular?

9. Da frequência à f.m.p.: em 1 000 lançamentos de dois dados, a soma 7 saiu 168 vezes e o 2 saiu 27. (a) Que probabilidades estimas e com que erro aparente? (b) Porque é que a f.m.p. teórica (6/36 e 1/36) é preferível a esta contagem?

10. Erros: corrige (a) «se a soma das probabilidades der 0,98, arredonda-se para 1» · (b) « μ é o valor mais frequente» · (c) « σ grande é mau» · (d) «em dois dados, cada soma tem 1/11».

11. Tecnologia: descreve como calcular μ e σ numa folha de cálculo com a f.m.p. — (a) μ com SOMAR.PROD(valores; probabilidades), (b) σ com a variância $\Sigma(x - \mu)^2 \cdot p$ em fórmula matricial ou coluna auxiliar, (c) conferência obrigatória antes de tudo.

12. Síntese: «Uma v.a. comprime o fenómeno em dois números.» Explica (4–5 linhas) como a f.m.p. guarda toda a informação, o que μ e σ acrescentam (concentração e dispersão), e porque é que um decisor olha primeiro para eles — mas tem de conferir a forma da tabela (é μ a resposta certa para o problema?).

Soluções — Variável aleatória e f.m.p.

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. números · $P(X = x_i) = 1 \cdot x_i \cdot p_i$ · dispersão.

2. $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com $p_i = 1/6$ cada. $\mu = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 3,5$. Interpretação: 3,5 é a **média teórica a longo prazo** — não é uma face possível, é o valor em torno do qual as médias de muitos lançamentos se concentram (nenhum lançamento dá «meio ponto», mas 100 lançamentos dão ≈ 350 pontos).

3. $(x-3,5)^2$: $6,25 \cdot 2,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 2,25 \cdot 6,25 \rightarrow \Sigma = 17,5 \rightarrow \text{variância} = 17,5/6 \approx 2,917 \rightarrow \sigma = \sqrt{2,917} \approx 1,71$. (a) As faces ficam tipicamente a $\approx 1,71$ da média (ex.: a maioria entre $\sim 1,8$ e $\sim 5,2$). (b) Se saísse quase sempre 6: μ subiria **perto de 6** e σ **cairia muito** (pouca dispersão — o oposto de «mais variado»).

4. (a) P : $2 \rightarrow 1/36 \cdot 3 \rightarrow 2/36 \cdot 4 \rightarrow 3/36 \cdot 5 \rightarrow 4/36 \cdot 6 \rightarrow 5/36 \cdot 7 \rightarrow 6/36 \cdot 8 \rightarrow 5/36 \cdot 9 \rightarrow 4/36 \cdot 10 \rightarrow 3/36 \cdot 11 \rightarrow 2/36 \cdot 12 \rightarrow 1/36 \rightarrow \Sigma = 36/36 = 1 \checkmark$. (b) $P(X=7) = 6/36 = 1/6 \cdot P(X \geq 10) = (3+2+1)/36 = 6/36 = 1/6$. (c) Porque os **pares** não são equiprováveis: a soma 7 tem 6 combinações (1+6, 2+5, 3+4...) e o 2 só uma (1+1) — dividir $1/11$ daria a mesma chance ao «impossível quase» e ao «mais frequente».

5. (a) $X \in \{0, 1, 2\}$: $P(X=0) = P(AA) = 2/5 \times 1/4 = 0,1 \cdot P(X=2) = P(VV) = 3/5 \times 2/4 = 0,3 \cdot P(X=1) = 3/5 \times 2/4 + 2/5 \times 3/4 = 0,3 + 0,3 = 0,6 \rightarrow$ soma $1 \checkmark$. (b) $\mu = 0(0,1) + 1(0,6) + 2(0,3) = 1,2 \cdot E(X^2) = 0(0,1) + 1(0,6) + 4(0,3) = 1,8 \rightarrow \text{variância} = 1,8 - 1,2^2 = 0,36 \rightarrow \sigma = 0,6$. (Nota: $\mu = 1,2 = 2 \times (3/5)$ — a média de vermelhas é a soma das médias individuais.)

6. (a) μ e σ são **parâmetros**: valores **fixos** que definem a população (conhecidos no modelo, em grego); $\bar{x}$ e s são **estatísticas**: calculam-se **de uma amostra** concreta (em latino) e **mudam** de amostra para amostra. (b) Ex.: a média da altura de todos os alunos da escola (μ) é uma só; a média das 30 alturas de uma amostra ($\bar{x}$) varia — é por isso que estimar μ é um problema (fichas 10–12).

7. $P(X \leq 4) = (1+2+3)/36 = 6/36 = 1/6 \cdot P(5 \leq X \leq 7) = (4+5+6)/36 = 15/36 = 5/12 \cdot P(X \text{ par}) = P(2,4,6,8,10,12) = (1+3+5+5+3+1)/36 = 18/36 = 1/2$ — cada acontecimento é a **soma das f.m.p. dos valores favoráveis**.

8. (a) Pagamento médio $= 2 \times \mu = 2 \times 3,5 = 7$ € **por jogo**. (b) Com custo 10 €, em média **perde-se 3 € por jogo** ($E = 7 - 10 = -3$) $\rightarrow$ não é justo (o lucro esperado do operador é 3 €/jogo). μ responde **sem simular** porque a média ponderada já contém a informação de frequências — o «longo prazo» é a própria fórmula.

9. (a) Estimativas: $P(7) \approx 168/1000 = 0,168$ (teórico $6/36 = 0,1667$) $\cdot P(2) \approx 27/1000 = 0,027$ (teórico $1/36 \approx 0,0278$) — perto, mas com **erro de amostragem**. (b) A f.m.p. teórica vem do **modelo** (combinatória, equiprobabilidade) — não depende de uma série finita, é exata e reutilizável; a contagem é uma **estimativa** que oscila (é a lei dos grandes números do AT 15).

10. (a) **Falso** — $\Sigma p_i = 1$ é **axioma**; 0,98 denuncia erro (valores em falta ou mal somados), arredondar esconderia o erro. (b) **Falso** — μ é a **média ponderada**; o mais frequente é a **moda** (podem diferir: na extração ex. 5, a moda é 1 (0,6) e $\mu = 1,2$). (c) **Falso** — σ grande só diz «dispersão grande» (mais incerteza/risco); é bom ou mau conforme o objetivo. (d) **Falso** — 11 valores, mas **probabilidades diferentes** ($1/36$ a $6/36$) — equiprováveis são as 36 combinações, não as somas.

11. (a) $\mu = \text{SOMAR.PROD}(x; p)$ — uma fórmula, valores em colunas. (b) Coluna auxiliar $(x - \mu)^2$, depois $\text{SOMAR.PROD}((x - \mu)^2; p)$ e $= \text{RAIZ}(\text{variância})$ (ou fórmula matricial com $\text{TRANSF.../MATRIZ.SOMARPROD}$). (c) **Conferir $\Sigma p_i = 1$** antes de qualquer cálculo — se falhar, μ e σ não significam nada (o «erro 0,98» do ex. 10).

12. A f.m.p. guarda **toda** a informação (cada x com a sua probabilidade); μ resume a **concentração** («onde fica») e σ a **dispersão** («quanto oscila») — dois números que um decisor lê primeiro («esperamos $\sim 1,2$ vermelhas, com desvio 0,6»). Mas μ só responde se a pergunta for de **posição**: para «qual a chance de exatamente X?» ou «e se der só 6?» há de olhar para a **forma da tabela** (a distribuição completa) — parâmetros guiam, a f.m.p. decide.

Nota: quatro blocos — **definir v.a. e f.m.p.** · **μ e σ com contas** · **dois dados (não equiprováveis)** · **paralelo população/amostra**. Liga: ficha 6 (S e acontecimentos) · ficha 7 (cadeias/sem reposição) · ficha 10 (estimativas) · AT 15 (folha de cálculo) · resumo 2.