

Ficha — Probabilidade condicionada: informação que atualiza a resposta

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Calcular probabilidades condicionadas e a regra do produto, usar árvores e tabelas de contingência, reconhecer acontecimentos independentes e aplicar a probabilidade total a cadeias de acontecimentos.

Revisão rápida

Condicionada: muitas vezes já se sabe algo sobre o resultado — a informação atualiza a probabilidade. Com $P(B) > 0$:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B) \quad \text{— «a probabilidade de A sabendo que B se realizou»}$$

Regra do produto (multiplica-se «para dentro»): $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ — escolhe o que está condicionado.

Conceito	Regra
Independentes ($P(A) > 0$ e $P(B) > 0$)	$P(A \mid B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ — as duas definições são equivalentes
Dependentes	a ocorrência de B muda P(A) — ex.: extração sem reposição (a caixa muda!)
Probabilidade total	$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$ ($A_1, \dots, A_n$ disjuntos e esgotam S)

Árvores: cada nó lança as hipóteses seguintes e ramos do mesmo nó somam 1; para obter a probabilidade de um caminho, multiplica-se ao longo dele — e as árvores da 2.ª etapa levam | (condicionadas). Exemplo da moeda: «não tem memória» → independente · dois alunos de uma turma sem reposição → dependente.

Tabelas de contingência: as linhas (ou colunas) restringem o espaço — ler $P(A|B)$ = «só olhando para a coluna/linha de B».

Estratégia: escrever o que se sabe (condição) → ver se muda o espaço (sim → condicionada) → árvore ou tabela → multiplicar/somar → interpretar (a informação mudou a resposta quanto?).

Exercícios

1. Completar: $P(A|B) = \frac{\quad}{\quad}$ com $P(B) \quad 0$ · pela regra do produto, $P(A \cap B) = P(B) \cdot \quad \cdot A$ e B são independentes quando $P(A|B) = \quad \cdot$ num dado, extrações sem reposição são $\quad$ e com reposição são $\quad$.

2. Tabela de contingência: turma com 14 rapazes e 16 raparigas; tocam instrumento 10 rapazes e 6 raparigas. Calcula $P(\text{instrumento})$, $P(\text{rapaz})$, $P(\text{instrumento} \mid \text{rapaz})$ e $P(\text{rapaz} \mid \text{instrumento})$ — e explica porque são diferentes.

3. Árvore sem reposição: saco com 3 vermelhas (V) e 2 azuis (A), extração dupla. Constrói a árvore (1.ª etapa: 3/5 e 2/5 · 2.ª etapa: condicionadas) e calcula $P(1.ª \text{ V e } 2.ª \text{ V})$ — confirma com a regra do produto.

4. Com vs sem reposição: (a) moeda, 2 lançamentos: $P(2 \text{ caras})$? Porque é independente? (b) o mesmo saco do ex. 3, mas com reposição (repõe-se sempre $3V/2A$): $P(2 \text{ vermelhas})$? Compara com $P(VV)$ do ex. 3 e explica a diferença pela mudança da caixa.

5. Verificar independência no dado: $A = \text{«sair } \leq 2\text{»}$ e $B = \text{«sair ímpar»}$. Calcula $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ e verifica se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ — são independentes? E com $C = \text{«} \leq 3\text{»}$ (A e C)?

6. Dois alunos de uma turma (14 rapazes, 16 raparigas), sem reposição: (a) $P(2.^\circ \text{ rapaz} \mid 1.^\circ \text{ rapaz})$? (b) $P(2.^\circ \text{ rapaz} \mid 1.^\circ \text{ rapariga})$? (c) Porque é que a escolha do primeiro muda o segundo (dependência) — e o que mudaria com reposição?

7. Probabilidade total: um fornecedor envia 60 % do material da empresa A (2 % defeituoso) e 40 % da empresa B (5 % defeituoso). Calcula $P(\text{defeituoso})$ com a fórmula da probabilidade total — e interpreta: onde esperar mais reclamações?

8. Ler uma árvore: 1.ª etapa — hipóteses com $P = 0,6$ e $0,4$; 2.ª etapa — $P(B|A) = 0,8$ e $P(B|\neg A) = 0,3$. (a) Porque é que os ramos de cada nó somam 1? (b) Calcula $P(B)$ (probabilidade total). (c) Calcula $P(A \cap B)$ e $P(\neg A \cap B)$ e confirma que somam $P(B)$.

9. Contingência múltipla: 50 alunos — 30 leem jornal (J), 20 não; entre os que leem, 12 são de ciências (C) e entre os que não leem são 10. Calcula $P(J)$, $P(C | J)$ e $P(C | \neg J)$ e mostra que são diferentes (dependência) — compara com $P(C)$.

10. Erros: corrige (a) « $P(A|B) = P(B|A)$ » · (b) « $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sempre» · (c) «numa árvore, os ramos podem somar 0,9» · (d) «sem reposição os acontecimentos continuam independentes».

11. Decisão com informação: dois postos de inspeção — I verifica 80 % do que passa por ele e apanha 95 % dos defeituosos; II verifica 20 % e apanha 99 %. (a) Com a árvore, $P(\text{«defeituoso apanhado»})$ em cada? (b) Qual posto deteta mais defeitos? (c) Porque é que «condicionado» é a palavra-chave (a inspeção muda o que sabes)?

12. Síntese: «A informação muda a probabilidade.» Explica (4–5 linhas) como $P(A|B)$ «atualiza» $P(A)$, o que a regra do produto faz numa cadeia e porque é que a independência (moeda) e a dependência (sem reposição) decidem o método — porta de entrada para a leitura crítica de sondagens e previsões.

Soluções — Probabilidade condicionada

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. $P(A \cap B) \cdot P(B) > P(A|B) \cdot P(A)$ · dependentes · independentes.

2. $N = 30$. $P(\text{instrumento}) = 16/30 = 8/15$ · $P(\text{rapaz}) = 14/30 = 7/15$ · $P(\text{instrumento} | \text{rapaz}) = 10/14 = 5/7 \approx 0,714$ · $P(\text{rapaz} | \text{instrumento}) = 10/16 = 5/8 = 0,625$. Diferem porque a **condição restringe o espaço**: a primeira só olha para os 14 rapazes, a segunda só para os 16 músicos — a base (denominador) muda.

3. 1.ª etapa: $P(V) = 3/5$, $P(A) = 2/5$. 2.ª etapa: $P(2.ªV | 1.ªV) = 2/4$ (ficaram 2 de 4) · $P(2.ªV | 1.ªA) = 3/4$. $P(VV) = 3/5 \times 2/4 = 6/20 = 3/10 = 0,3$ — regra do produto: $P(1.ªV) \cdot P(2.ªV | 1.ªV) = 3/5 \times 2/4 \checkmark (0,3)$.

4. (a) $P(\text{cara, cara}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$ — a moeda «não tem memória»: cada lançamento é **independente** (as condições não mudam). (b) Com reposição: $P(VV) = 3/5 \times 3/5 = 9/25 = 0,36 > 0,3$. Diferença: sem reposição a caixa **muda** (2V em vez de 3) → **dependência** e probabilidade menor.

5. $P(A) = 2/6 = 1/3$ · $P(B) = 3/6 = 1/2$ · $P(A \cap B) = P(\{1, 3\}) = 2/6 = 1/3$. Verificação: $P(A) \cdot P(B) = 1/3 \times 1/2 = 1/6 \neq 1/3 \rightarrow$ **NÃO são independentes** (saber que saiu ímpar aumenta a chance de ≤ 2). Com $C = \{1, 2, 3\}$: $P(A \cap C) = P(\{1, 2\}) = 1/3$; $P(A) \cdot P(C) = 1/3 \times 1/2 = 1/6 \neq 1/3 \rightarrow$ também **dependentes** ($A \subset C$: se A ocorre, C ocorre sempre).

6. (a) Restam 13 rapazes de 29 → $13/29 \approx 0,448$. (b) Restam 14 rapazes de 29 → $14/29 \approx 0,483$. (c) O 1.º rapaz **remove um rapaz** (e não uma rapariga) → a composição da turma muda → dependência. Com reposição voltaria a ser 14/30 nos dois casos (independente).

7. $P(D) = 0,02 \times 0,6 + 0,05 \times 0,4 = 0,012 + 0,02 = 0,032 \rightarrow 3,2\%$ do material é defeituoso. Interpretação: mesmo a B sendo «pior» (5 %), a A entrega mais volume → em termos absolutos os defeitos vêm dos dois; para decidir inspeção, interessa **P(empresa | defeituoso)** (quem é mais culpado) — leitura inversa da condicionada.

8. (a) Porque as hipóteses de cada nó são **exaustivas e disjuntas** (B ou não-B) — soma tem de ser 1. (b) $P(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,3 = 0,48 + 0,12 = 0,6$. (c) $P(A \cap B) = 0,48$ · $P(\neg A \cap B) = 0,12$ · $0,48 + 0,12 = 0,6 = P(B) \checkmark$ (cada caminho «contribui» para B).

9. $P(J) = 30/50 = 0,6$ · C total = 12 + 10 = 22 → $P(C) = 22/50 = 0,44$. $P(C | J) = 12/30 = 0,4$ · $P(C | \neg J) = 10/20 = 0,5$. Como $0,4 \neq 0,5$ (e ambos diferem de 0,44), J e C **dependem**: quem não lê jornal tem maior propensão de ser de ciências neste dado. **Lição**: é o **número** que decide — nunca se assume a independência.

10. (a) **Falso** — $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ e $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$: só coincidem se $P(A) = P(B)$. (b) **Falso** — só quando são **independentes**; em geral multiplica-se **P(condicionado)** (regra do produto). (c) **Falso** — os ramos de um nó **somam 1** (0,9 = esqueceste uma hipótese). (d) **Falso** — sem reposição a caixa muda → **dependentes** (ex. 3 e 6).

11. (a) I: $0,8 \times 0,95 = 0,76$ · II: $0,2 \times 0,99 = 0,198$. (b) O **posto I** apanha muito mais (0,76 vs 0,198) — a cobertura (0,8) domina mesmo com taxa ligeiramente menor. (c) Porque a inspeção **restringe** o que se observa: $P(\text{defeituoso} | \text{inspecionado}) \neq P(\text{defeituoso})$ — só quem passa pelo detetor «condiciona» a amostra; é por isso que cadeias de controlo se desenham em árvores.

12. $P(A|B)$ parte de $P(A)$ e **repete o cálculo no espaço de B** — a informação («já sei que B») muda a base e, com ela, a resposta (ex. 2: $8/15 \rightarrow 5/7$). A **regra do produto** encadeia etapas (multiplicar ramos) e a **probabilidade total** soma os caminhos (ex. 8: $0,48 + 0,12$). A **independência** decide o método: se o passo seguinte não muda nada (moeda), multiplica-se direto; se muda (sem reposição), obriga a condicionada (ex. 6: $13/29$). É a mesma lógica com que se lê uma sondagem: saber que soube «eleições 2 semanas antes» atualiza a previsão — informação, não adivinhação.

Nota: quatro blocos — **condicionada e produto** · **árvore e cadeias** · **independência** · **probabilidade total e decisão**. Liga: ficha 6 (S, acontecimentos) · ficha 8 (v.a. em espaços finitos) · AT 15 (simulação) · resumo 2.