

Ficha — Modelos populacionais: crescimento linear e exponencial

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Reconhecer e comparar os **crescimentos linear e exponencial**, construir modelos $f(x) = ax + b$ e $f(x) = a \cdot b^x$ a partir de dados, aplicar o **modelo malthusiano** e as suas críticas e selecionar o modelo adequado a uma série temporal.

Revisão rápida

	Linear $f(x) = ax + b$	Exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ ($b > 1$)
Cresce a...	taxa absoluta (acrescenta a por unidade)	taxa relativa (multiplica por b por período)
Em tabela	diferenças constantes	razões constantes
Gráfico	reta (inclinação a)	curva que «dispara» (acelera sempre)
Exemplo	acrécimo fixo de clientes/ano	população, juros compostos, vírus

Regra de prata: na tabela, se as **subtrações** dão sempre o mesmo → linear; se as **divisões** dão sempre o mesmo → exponencial. Nenhum «vence no início» por natureza: podem **coincidir num ponto** — mas a exponencial **acelera** e o linear segue retinho.

Modelo malthusiano (Malthus, *Ensaio sobre o princípio da população*, 1798): a população cresce **geometricamente** (exponencial) e os meios de subsistência **aritmeticamente** (linear) →, a prazo, pressão sobre os recursos (fome, guerra, doença). **Crítica:** a realidade inclui **tecnologia, controlo natalidade e recursos** — nenhum modelo teórico escapa às suas **limitações**.

Aplicações: população mundial, cobertura de acesso à Internet, número de carros elétricos, taxa de inflação, preços de um produto — séries temporais (ex. Pordata) para **ajustar** modelos por regressão e **discutir a adequação** ao objetivo (ficha 5 e AT 14).

Estratégia: olhar a tabela (diferenças ou razões?) → escolher o modelo → determinar a, b com dados → calcular/ler valores → **prever com cautela** e justificar as limitações.

Exercícios

1. Completar: o crescimento linear tem variação _____ constante e gráfico em _____ · o exponencial multiplica por um _____ constante e o gráfico _____ · numa tabela, diferenças constantes indicam modelo _____ e razões constantes indicam modelo _____.

2. Identificar modelos: (a) tabela A: 2, 5, 8, 11, 14 → que modelo? calcula a taxa. (b) tabela B: 8, 16, 32, 64, 128 → que modelo? calcula a razão.

3. Construir modelos: (a) um negócio ganha 15 clientes por mês e tinha 40 em janeiro → escreve $f(x)$ (x = meses desde janeiro) e prevê os clientes em julho ($x = 6$). (b) Uma cultura multiplica-se por 1,3 a cada semana, começando em 200 → escreve $g(x)$ e calcula para $x = 4$.

4. Malthus (1798): explica a «armadilha» do modelo (crescimento geométrico vs aritmético) e duas críticas modernas (tecnologia, demografia, recursos) — porque é que um modelo pode ser errado sem ser inútil?

5. Comparar: $f(x) = 10 + 5x$ e $g(x) = 10 \cdot 2^x$ ($x = 0, 1, 2, 3, 4$). (a) Constrói as duas tabelas. (b) Em que x coincidem? A partir de quando g passa a f ? (c) Conclusão: o que acontece a longo prazo, mesmo que o linear «pareça razoável» a curto?

6. Tempo de duplicação: uma população obedece a $N(t) = 50 \cdot 2^{t/8}$ (t em anos). (a) Qual é o valor inicial? (b) Quantas vezes dobra até atingir 400? (c) Em que ano atinge 400?

7. Leitura de dados: uma tabela mostra o nº de carros elétricos (milhares): ano 0: 10 · ano 1: 14 · ano 2: 19,6 · ano 3: 27,4. (a) Calcula as razões e decide o modelo. (b) Prevê o ano 4. (c) Porque é que a previsão é uma hipótese e não um facto?

8. Escolher o modelo: associa e justifica — (a) evolução da população de um país · (b) preço fixo de um bilhete com acréscimo anual · (c) taxa de inflação anual em percentagem · (d) número de inscritos numa plataforma que cresce por «boca-a-boca».

9. Discreto vs contínuo: população de uma aldeia (pessoas) e anos inteiros. (a) Porque é que $f(x)$ devolve «meia pessoa»? (b) Quando é melhor usar a tabela (discreta) em vez da curva? (c) O que muda nas previsões com arredondamentos sucessivos?

10. Erros: corrige (a) «exponencial é linear com inclinação maior» · (b) «razão constante indica linear» · (c) «os dois modelos podem coincidir no ponto inicial, por isso dão o mesmo a prazo» · (d) «o modelo prevê o futuro».

11. Tecnologia (ligação AT 14): descreve em 3 passos como ajustarias uma série da Pordata (ex.: acesso à Internet) a um modelo numa folha de cálculo — dados → gráfico → tendência/regressão → discussão da adequação (o que pode fazer o modelo falhar?).

12. Síntese: «Um modelo é uma pergunta ao futuro.» Explica (4–5 linhas) como se escolhe entre linear e exponencial a partir dos dados, o que cada um permite prever e porque é que compreender as limitações é parte do modelo (ex.: malthus) — prever é decidir com incerteza assumida.

Soluções — Modelos populacionais: linear e exponencial

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. **taxa** (absoluta) · **reta** · **valor/razão** · **acelera** (curva crescente) · **linear** · **exponencial**.

2. (a) Subtrações: $5 - 2 = 3$, $8 - 5 = 3$, $11 - 8 = 3$, $14 - 11 = 3$ (constante) → **linear**, $f(x) = 2 + 3x$. (b) Divisões: $16/8 = 2$, $32/16 = 2$, $64/32 = 2$, $128/64 = 2$ (constante) → **exponencial**, $g(x) = 8 \cdot 2^x$ (dobra por período).

3. (a) $f(x) = 40 + 15x$; em julho ($x = 6$): $40 + 90 = 130$ clientes. (b) $g(x) = 200 \cdot 1,3^x$; $x = 4$: $200 \times 1,3^4 = 200 \times 2,8561 \approx 571$ (células/indivíduos — arredondar conforme o contexto).

4. Armadilha: **geometricamente** ($\times b$ por período) vs **aritmeticamente** ($+c$ por período) → a exponencial ultrapassa sempre a linha, criando «fome» (1798). Críticas: (1) **tecnologia** (agricultura, produtividade) desloca a linha dos subsistências; (2) **demografia** (a taxa de natalidade cai com o desenvolvimento — a curva não é fixa). Um modelo errado é útil porque **organiza a discussão** (o que teria de ser verdade?) e dá **referência para testar dados** — limitações assumidas $\neq$ modelo inútil.

5. (a) x : 0,1,2,3,4 → f : **10, 15, 20, 25, 30** · g : **10, 20, 40, 80, 160**. (b) Coincidem em $x = 0$ (ambos 10); já em $x = 1$ $g(1) = 20 > f(1) = 15$. (c) A longo prazo a exponencial **dispara** (160 vs 30) — o linear pode parecer razoável no curto prazo e estar completamente errado depois; por isso se julga o modelo pela **natureza do processo**, não só pelo ajuste imediato.

6. (a) $N(0) = 50$. (b) $50 \rightarrow 100 \rightarrow 200 \rightarrow 400 = 3$ dobras. (c) Cada dobra leva 8 anos → $3 \times 8 = t = 24$ anos (confirma: $50 \cdot 2^{24/8} = 50 \cdot 2^3 = 400 \checkmark$).

7. (a) $14/10 = 1,4$, $19,6/14 = 1,4$, $27,4/19,6 = 1,4$ → **razão constante 1,4** → **exponencial** (+40 % por ano). (b) ano 4: $27,4 \times 1,4 = 38,36$ milhares ($\approx 38,4$). (c) É uma **hipótese**: pressupõe que a razão se mantém (sem mudanças de política, escassez, tecnologia) — prever é projetar o passado, com incerteza.

8. (a) **Exponencial (ou logarísta — ficha 5)**: demografia depende de taxas (n° de nascimentos por indivíduo existente). (b) **Linear**: acréscimo fixo por ano (taxa absoluta constante). (c) **Exponencial**: inflação é **percentual sobre o valor atual** (multiplicador). (d) **Exponencial** inicial: cada inscrito «traz» inscritos (taxa proporcional) — até saturar (ver logístico, ficha 5).

9. (a) Porque $f(x)$ é uma **função contínua** (reais) aplicada a um objeto **discreto** (pessoas inteiras). (b) Quando a unidade é contável (pessoas, carros) ou os períodos são inteiros (anos) — a **tabela** evita fracos falsos. (c) Arredondamentos sucessivos **acumulam erro** (sobretudo em exponenciais, onde o erro «cresce» com o valor) — por isso se arredonda no fim e se indicam intervalos.

10. (a) **Falso** — linear acrescenta, exponencial multiplica (a taxa cresce com o valor). (b) **Falso** — razão constante = **exponencial**; linear tem **diferença** constante. (c) **Falso** — coincidir num ponto não significa convergir: divergem a partir do 2.º período (ex. 5). (d) **Falso** — o modelo **projeta** sob hipóteses; prevê «se nada mudar», por isso se discutem limitações.

11. (1) **Dados**: importar/colar a série (ano, valor) da Pordata numa folha de cálculo. (2) **Gráfico**: dispersão + tendências (adicionar linha de tendência linear e exponencial, com R^2 se disponível). (3) **Adequação**: escolher a que melhor segue os dados e discutir se o processo é de taxa constante (linear) ou percentual (exponencial), o horizonte da previsão e os fatores que podem quebrar a tendência (políticas, saturação) — o AT 14 faz isto com a Pordata.

12. Escolhe-se pelo **formato dos dados** (diferenças → linear; razões → exponencial) e pela **natureza do processo** (acrécimo fixo vs taxa proporcional). Cada um permite prever: o linear projeta **tendência reta**; o exponencial projeta **aceleração** (dobras). As **limitações** fazem parte: Malthus errou porque fixou taxas que a realidade move (tecnologia, demologia) — logo prever é **decidir com incerteza assumida**: enunciado do modelo, as hipóteses e o intervalo onde a previsão é crível. É isso que transforma um cálculo num **juízo fundamentado**.

Nota: quatro blocos — **identificar (tabela/gráfico)** · **construir e calcular** · **malthus e comparação** · **adequação e limitações**. Liga: ficha 5 (logarítmico, logístico e escolha de modelo) · AT 14 (Pordata e regressão) · resumo 1.