

# Ficha — Modelo normal: a curva de sino que organiza o contínuo

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

**Objetivo:** Reconhecer o **modelo normal**  $N(\mu, \sigma)$  como distribuição de **suporte contínuo**, identificar as propriedades da curva (simetria,  $\mu$ ,  $\sigma$ , inflexões), calcular probabilidades de intervalos **com tecnologia** e interpretá-las — preparando a inferência estatística.

## Revisão rápida

**Normal  $N(\mu, \sigma)$**  = um dos modelos de probabilidade mais importantes para fenómenos **contínuos** (altura, peso de um adulto — o documento cita-os): histogramas reais de muitos dados tendem para esta forma, e é a **base da inferência clássica**.

| Propriedade                       | Leitura                                                                                                                               |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Forma de sino, simétrica          | valores próximos de $\mu$ são os <b>mais frequentes</b> ; os extremos, raros                                                          |
| $\mu$ (parâmetro de posição)      | é o <b>eixo de simetria</b> — nada de assimetrias                                                                                     |
| $\sigma$ (parâmetro de dispersão) | distância de $\mu$ até aos <b>pontos de inflexão</b> (mudança de curvatura) — quanto maior $\sigma$ , mais larga e «achatada» a curva |
| Área total                        | = 1 (100 %) — a probabilidade é área                                                                                                  |

Regra 68–95–99,7 (aproximada):

$$P(\mu \pm 1\sigma) \approx 68 \% \cdot P(\mu \pm 2\sigma) \approx 95 \% \cdot P(\mu \pm 3\sigma) \approx 99,7 \%$$

**Calcular probabilidades:**  $P(a < X < b)$  = **área entre a e b** → na prática, **com tecnologia** (tabela de distribuições, folha de cálculo, calculadora) — nunca «de cor». Com suporte contínuo,  $P(X = c) = 0$  (um ponto não tem área) → **só se pedem intervalos**.

**Estratégia:** confirmar que é normal (contínuo, simétrico) → marcar  $\mu$  e os limites em unidades de  $\sigma$  → escolher o intervalo (regra ou tecnologia) → **traduzir para a situação** («≈ 68 % dos adultos entre 163 e 177 cm»).

## Exercícios

1. Completar: a normal é simétrica em relação a \_\_\_\_\_ · os pontos de inflexão estão a \_\_\_\_\_ de  $\mu$  · a área total é \_\_\_\_\_ · para variáveis contínuas,  $P(X = \text{um valor exato}) = \text{_____}$  — por isso pedem-se \_\_\_\_\_.

2. Alturas:  $X \sim N(170, 7)$  ( $\mu = 170$  cm,  $\sigma = 7$  cm). Calcula com a regra 68–95–99,7: (a)  $P(163 < X < 177)$  · (b)  $P(156 < X < 184)$  · (c)  $P(149 < X < 191)$  — indica quantos  $\sigma$  cada limite representa.

3. Extremos: com  $N(170, 7)$ , (a) que percentagem fica fora de 149–191? (b) num grupo de 300 adultos, quantos se esperam fora desse intervalo (arredonda)? (c) Porque é que «fora de  $3\sigma$ » é usado como critério de valor atípico?

4. Duas normais com a mesma média:  $A \sim N(170, 7)$  e  $B \sim N(170, 14)$ . (a) Calcula  $P(163 < X < 177)$  em A e em B (usa 68 % em A e o dobro do intervalo de  $\sigma$  em B). (b) Descreve as duas curvas (altura e largura) e diz qual representa populações mais «iguais entre si».

5. Leitura gráfica: num gráfico de  $N(\mu, \sigma)$ , marca (a)  $\mu$  (simetria), (b) os dois pontos de inflexão e (c) explica o que significa «a área entre a e b é 0,42» — e o que acontece à área total se a curva for esticada por um  $\sigma$  maior.

6. Tecnologia (o caminho do documento): descreve em 3 passos como obter  $P(150 < X < 190)$  para  $N(170, 7)$  numa folha de cálculo/tabela — definir → área entre limites → traduzir. Porque é que a tecnologia dispensa tabelas de z ao nível deste curso?

7. Modelar com amostra: de uma amostra se obtém média 62 e desvio padrão 9 ( $n = 40$ ). (a) Que modelo se propõe (e porque é uma estimativa:  $N(62, 9)$ )? (b) O que muda se a nova amostra der média 65? (c) Onde é que isto será usado (fichas 11–12)?

8. Contínuo vs discreto: (a) Porque é que  $P(X = 170) = 0$  em  $N(170, 7)$  e não é «zero por azar»? (b) Na prática, para perguntar a probabilidade de medir exatamente 170,0 cm, que intervalo se usa e porquê? (c) Lembra uma f.m.p. discreta (ex. 8 da ficha 8) onde  $P(X = 7) > 0$  — o que muda?

9. Reconhecer por forma: associa — simétrica em sino (\_\_\_\_) · acelera e desacelera com teto K (\_\_\_\_) · sempre a crescer devagar (\_\_\_\_) · reta (\_\_\_\_). O que identifica a normal de todas (continuidade + simetria)?

10. Erros: corrige (a) «95 % dos valores estão entre  $\mu \pm \sigma$ » · (b) « $\mu$  mede a dispersão» · (c) «com  $\sigma$  maior, os valores ficam mais concentrados» · (d) «dá para calcular  $P(150 < X < 190)$  de cabeça».

11. Detetar atípicos: numa turma,  $X \sim N(12, 3,5)$ . Um aluno tirou 21 valores. (a) Quantos  $\sigma$  do  $\mu$  está? (b) É atípico pelo critério de  $3\sigma$ ? (c) E se a prova fosse muito difícil ( $\sigma$  real maior, ex. 6) — o mesmo 21 ainda chocaria? Comenta: o «atípico» depende de  $\mu$  e  $\sigma$ , não do número isolado.

12. Síntese: «A normal é a ponte para a inferência.» Explica (4–5 linhas) porquê esta curva é a mais usada (simetria,  $\mu$ ,  $\sigma$ , área = probabilidade), o que a regra 68–95–99,7 permite estimar rapidamente, e como o Teorema Limite Central faz aparecer a normal onde ninguém esperava (ficha 11) — abrindo a porta aos intervalos de confiança (ficha 12).

## Soluções — Modelo normal

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1.  $\mu \cdot \sigma \cdot 1 \cdot 0$  · intervalos.

2. (a)  $163 = 170 - 7$  e  $177 = 170 + 7 \rightarrow \pm 1\sigma \rightarrow \approx 68 \%$ . (b)  $156/184 = 170 \mp 14 = \pm 2\sigma \rightarrow \approx 95 \%$ . (c)  $149/191 = 170 \mp 21 = \pm 3\sigma \rightarrow \approx 99,7 \%$ . A regra traduz limites a «unidades de  $\sigma$ » — é o truque:  $(X - \mu)/\sigma$ .

3. (a) Fora de  $\pm 3\sigma$ :  $100 \% - 99,7 \% = 0,3 \%$  (metade para cada cauda:  $0,15 \%$  em cada lado). (b)  $0,003 \times 300 = 0,9 \approx 1$  pessoa — espera-se «um» fora do intervalo. (c) Porque, na normal, passar de  $3\sigma$  é **estatisticamente raro** ( $0,3 \%$ ) — um valor lá fora é «merecedor de explicação» (erro de registo ou fenómeno especial)  $\rightarrow$  é o critério de **valor atípico** (com cautela: depende do modelo!).

4. (a) Em A:  $163-177 = \pm 1\sigma \rightarrow \approx 68 \%$ . Em B ( $\sigma = 14$ ): o mesmo intervalo  $163-177$  é  $\pm 0,5\sigma$  — a regra exige  $\pm 1\sigma = 156-184 \rightarrow$  para o intervalo dado usa-se a tecnologia ( $\approx 38,3 \%$ , pois  $0,5\sigma$  cobre  $\sim 38 \%$  por tabela). (b) A é mais **estreita e alta** (menos  $\sigma$ ); B é mais **larga e baixa**. A representa população mais «igual entre si» (menos dispersão).

5. (a) Linha vertical central =  $\mu$ . (b) Dois pontos, um de cada lado, onde a curva deixa de ser côncava para convexa — a **distância até  $\mu$  é  $\sigma$** . (c) «Área  $0,42$ » = **42 % de probabilidade** de X cair entre a e b. Se  $\sigma$  crescer, a curva espalha-se e a área **entre os mesmos limites diminui** (a total mantém-se 1 — estica, não soma).

6. (1) **Definir** o modelo  $N(170, 7)$  na folha (ou escolher a distribuição na tabela/calculadora). (2) Pedir a **área/cumulativa entre 150 e 190** (função da distribuição normal:  $F(190) - F(150)$ ). (3) **Traduzir**: o número devolvido é a percentagem de casos. A tecnologia dispensa a tabela de z porque calcula diretamente F para qualquer  $\mu$  e  $\sigma$  (a tabela só serve para  $N(0,1)$  e exige a conversão manual  $(x - \mu)/\sigma$ ).

7. (a) Propõe-se  $N(62, 9)$  — a média e o desvio amostrais **estimam**  $\mu$  e  $\sigma$  (são  $\bar{x}$  e  $s$  da ficha 8) — mas é **estimativa**: depende da amostra. (b) Nova amostra  $\rightarrow$  novo modelo (ex.  $N(65, 8,5)$ ) — os parâmetros **não são constantes da natureza**, são lidos nos dados. (c) É exatamente o passo usado no **TLC** (ficha 11) para modelar a distribuição de  $\bar{x}$  e nos **intervalos de confiança** (ficha 12).

8. (a)  $P(X = c) = 0$  porque a probabilidade em contínuos é **área** — um ponto tem largura zero, logo área zero (não é «azar», é geometria). (b) Usa-se um intervalo fino em torno do valor (ex.:  $169,95-170,05$ ) — o que corresponde ao **grão de medida** da régua. (b2) Na f.m.p. discreta (ficha 8) cada valor é um «retângulo» com altura  $p > 0$ :  $P(X = 7) = 6/36$  — aí os pontos **têm** probabilidade.

9. simétrica em sino  $\rightarrow$  **normal** · com teto  $K \rightarrow$  **logístico** · sempre devagar  $\rightarrow$  **logarítmico** · reta  $\rightarrow$  **linear**. O que identifica a normal: **continuidade** (suporte  $\mathbb{R}$ ) + **simetria em  $\mu$**  + parâmetros ( $\mu, \sigma$ ) — as outras não têm simetria dupla nem  $\sigma$  como «largura».

10. (a) **Falso** —  $95 \%$  é em  **$\mu \pm 2\sigma$**  ( $\pm 1\sigma$  tem  $\sim 68 \%$ ). (b) **Falso** —  $\mu$  é posição (localização); a **dispersão é  $\sigma$** . (c) **Falso** —  $\sigma$  maior = curva mais larga = valores **menos** concentrados. (d) **Falso** — na prática calcula-se **com tecnologia** (área entre limites); de cabeça só a regra  $68-95-99,7$  em múltiplos de  $\sigma$ .

11. (a)  $(21 - 12)/3,5 = 9/3,5 \approx 2,57\sigma$ . (b)  $2,57 < 3 \rightarrow$  **não atípico** pelo critério de  $3\sigma$  — fica entre  $2\sigma$  e  $3\sigma$ , onde se encontram  **$\sim 4,3 \%$**  dos casos: raro, mas perfeitamente esperável em turmas grandes. (c) Com  $\sigma = 6$ :  $(21 - 12)/6 = 1,5\sigma$  — nada de espantoso. **Lição**: «atípico» é uma relação com  $\mu$  e  $\sigma$  do modelo, não uma propriedade do número 21 — prova difícil muda  $\sigma$  e muda o juízo.

12. A normal é usada porque **resume** contínuos com dois parâmetros ( $\mu$  posição,  $\sigma$  largura), tem **simetria** (permite raciocinar por caudas) e a **área = probabilidade** (leitura visual direta). A regra  $68-95-99,7$  dá estimativas rápidas («95 % entre  $\pm 2\sigma$ ») e o critério de  $3\sigma$  deteta atípicos. E o essencial: o **TLC** mostra que a média amostral  $\bar{x}$  **tende a ser normal** mesmo quando a população não é (ficha 11) — é essa aparição «esperada» da normal que legitima construir **intervalos de confiança** para  $\mu$  (ficha 12): da curva ao juízo sobre a população.

**Nota**: quatro blocos — **propriedades** · **regra 68-95-99,7 com contas** · **tecnologia e contínuo** · **ponte para a inferência**. Liga: ficha 4-5 (formas) · ficha 8 ( $\mu, \sigma$ ) · fichas 11-12 (TLC e IC) · AT 15 (normal na tecnologia) · resumo 2.