

Ficha — Intervalos de confiança: estimar com incerteza declarada

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Construir intervalos de confiança para o valor médio (95 %, 90 % e 99 %), calcular a **margem de erro** e analisar a relação entre **confiança, margem e dimensão da amostra** — além de aplicar o intervalo à **proporção** (leitura de sondagens).

Revisão rápida

Porquê um intervalo: qualquer estimativa pontual varia de amostra para amostra (ficha 10) — o TLC (ficha 11) garante que a distribuição de $\bar{x}$ é Normal para n grande → dá para traduzir $\bar{x}$ numa «régua» onde μ vive com confiança.

Confiança	Multiplicador (z)	Fórmula para μ
95 %	1,96	$\bar{x} \pm 1,96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$
90 %	1,645	$\bar{x} \pm 1,645 \cdot \sigma/\sqrt{n}$
99 %	2,576	$\bar{x} \pm 2,576 \cdot \sigma/\sqrt{n}$

σ desconhecido → substitui-se pelo desvio-padrão amostral s . **Margem de erro** = metade da amplitude do intervalo.

Leitura correta (o aleatório está nos limites!): diz-se «a probabilidade de o intervalo conter μ é 95 %» — e não «a probabilidade de μ estar contido» (μ é fixo; quem se repete é o processo). Com 100 amostras, ~95 intervalos conteriam μ — mas na prática só se calcula **um**, e não se sabe se é dos 95 (daí «confiança»).

Relações: confiança maior → intervalo mais largo (1,645 < 1,96 < 2,576) · n maior → mais estreito ($\sigma/\sqrt{n}$ cai — raiz engole o ganho) · **proporção:** p é caso particular de média (valores 0/1, média p , variância $p(1-p)$) → $\hat{p} \pm z \cdot \sqrt{(\hat{p}(1-\hat{p}))/n}$.

Estratégia: identificar o parâmetro (μ ou p) → escolher confiança → aplicar a fórmula ($\sigma \rightarrow s$ se preciso) → ler a frase certa → comentar margem (n , confiança, contexto).

Exercícios

1. Completar: o IC de 95 % para μ é $\bar{x} \pm \text{_____} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ · para 90 % multiplica-se por _____ e para 99 % por _____ · a margem de erro é _____ da amplitude · se σ for desconhecido, usa-se _____.

2. Cálculo: $\bar{x} = 50$, $\sigma = 10$, $n = 25$. (a) Calcula o erro padrão $\sigma/\sqrt{n}$. (b) Constrói o IC de 95 %. (c) Constrói o IC de 99 % e compara as margens.

3. Três níveis, a mesma amostra ($\bar{x} = 50$, $\sigma = 10$, $n = 25$): calcula as margens de 90 %, 95 % e 99 % (3,29 · 3,92 · 5,15) e ordena as amplitudes. (a) Porque é que mais confiança custa largura? (b) Qual escolherias para um inquérito de jornal (e porquê)?

4. Ler um intervalo: um estudo dá IC 95 % = [44,2; 55,8]. (a) Qual é a amplitude? A margem? (b) Qual o $\bar{x}$ central? (c) Reescreve a frase de leitura correta e, a seguir, a versão errada que os alunos costumam dizer.

5. Leitura correta vs errada: avalia — (a) «com 95 % de confiança, a média da população está entre 46,08 e 53,92» · (b) «há 95 % de hipóteses de $\mu = 50$ » · (c) «se repetirmos a amostra 100 vezes, ~95 intervalos contêm μ ». Qual segue a regra do documento (o aleatório nos limites)?

6. Cem amostras: o documento explica que 100 amostras dariam ~95 intervalos com μ . (a) Porque é que, na prática, só há um intervalo? (b) O que isso implica para falar «probabilidade de μ estar aí»? (c) Onde está, afinal, a aleatoriedade (nos limites ou em μ)?

7. Efeito do tamanho: com $\bar{x} = 50$, $\sigma = 10$ e 95 %, a margem é 3,92 para $n = 25$. (a) Calcula a margem para $n = 50$ ($\approx 2,77$) e para $n = 100$ ($\approx 1,96$). (b) Que fração do ganho leva dobrar n ? (c) De 25 para 100 (quadruplicar) o que acontece à margem? — comenta o custo dos inquéritos.

8. Proporção: numa amostra de $n = 625$, $\hat{p} = 0,44$ (44 %). (a) Porque é que p é um «caso particular de média» (valores 0 e 1, média p , variância $p(1-p)$)? (b) Calcula o erro padrão da proporção e o IC de 95 % ($\pm 3,9$ pontos percentuais) $\rightarrow$ [40,1 %; 47,9 %].

9. Sondagem: «X tem 52 % com margem de ± 3 %» (95 %). (a) Reescreve o intervalo e explica porquê não se pode declarar «X vence» (49 %–55 % abrange empate/vitória?). (b) Se a margem fosse ± 1 % (n maior), o que mudava na afirmação? (c) O que a margem não cobre (viés da não-resposta — ficha 10)?

10. Erros: corrige (a) «95 % dos indivíduos estão entre $\bar{x} \pm 1,96\sigma/\sqrt{n}$ » · (b) «n maior dá mais confiança» · (c) «com σ desconhecido multiplica-se 1,96 por σ da população».

11. Tecnologia (programa do documento, AT 16): em Python, sorteiam-se 100 amostras de $N(0, 1)$ com $n = 20$ e calcula-se o IC 95 % de cada. (a) O que o programa deve mostrar (quantos intervalos contêm 0 — a média da população)? (b) O que se observa ao aumentar n ou a confiança (amplitudes)? (c) Porque é que isto «prova» a leitura?

12. Síntese: «De um número para uma régua.» Explica (4–5 linhas) como o IC completa a estimativa pontual com a incerteza declarada, o que os três fatores (confiança, n, dispersão) fazem à largura, e porquê a frase certa («o intervalo contém μ ») é o que separa estatística séria de manchete — o juízo informado que as AE pedem sobre sondagens.

Soluções — Intervalos de confiança

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. $1,96 \cdot 1,645 \cdot 2,576 \cdot \text{metade} \cdot s$.

2. (a) $\sigma/\sqrt{n} = 10/\sqrt{25} = 10/5 = 2$. (b) 95 %: $50 \pm 1,96 \times 2 = 50 \pm 3,92 \rightarrow [46,08; 53,92]$. (c) 99 %: $50 \pm 2,576 \times 2 = 50 \pm 5,152 \rightarrow [44,85; 55,15]$ — margem 5,15 > 3,92: mais confiança, mais largura.

3. Margens (erro padrão 2): 90 % $\rightarrow 1,645 \times 2 = 3,29$ · 95 % $\rightarrow 3,92$ · 99 % $\rightarrow 5,15$. Amplitudes: $6,58 < 7,84 < 10,30 \rightarrow$ ordem crescente com a confiança. (a) Cobrir mais probabilidade exige **alargar** a régua (o z cresce) — a confiança «compra-se» com largura. (b) Para inquérito de jornal costuma-se o **95 %** (padrão: robusto sem ser inútil; os 90 % dariam margem menor mas menos garantia).

4. (a) Amplitude = $55,8 - 44,2 = 11,6$ · margem = $11,6/2 = 5,8$. (b) $\bar{x} = 44,2 + 5,8 = 50$ (= $(44,2 + 55,8)/2$). (c) Certa: «com 95 % de confiança, o intervalo [44,2; 55,8] contém μ ». Errada típica: «há 95 % de probabilidade de μ estar no intervalo» (inverte quem é aleatório — contra a regra do documento).

5. (a) **Certa** (confiança declarada + intervalo que contém μ). (b) **Errada** — μ não tem «probabilidade de ser 50» (é fixo; e 95 % não é de coincidência exata). (c) **Certa e é a justificação**: é a leitura frequentista dos 100 experimentos (~95 contém) — coincide com a regra do documento: o aleatório está nos **limites**.

6. (a) Porque cada estudo recolhe **uma amostra** $\rightarrow$ calcula-se um intervalo. (b) Não se pode atribuir probabilidade a μ (está fixo): fala-se da **cobertura do método** (95 % dos intervalos, no longo prazo). (c) A aleatoriedade está nos **limites do intervalo** ($\bar{x}$ muda de amostra para amostra) — μ é o alvo fixo; por isso se diz «o intervalo contém μ » e não « μ está contido».

7. (a) $n = 50$: $1,96 \times 10/\sqrt{50} = 1,96 \times 1,414 \approx 2,77$ · $n = 100$: $1,96 \times 10/10 = 1,96$. (b) Dobrar n reduz a margem só a $\approx 70,7\%$ ($\div \sqrt{2}$) — ganha-se pouco. (c) Quadruplicar n **divide por 2** a margem ($3,92 \rightarrow 1,96$ de 25 para 100) — é a raiz; para cortar a margem a meio, quatro vezes mais inquiridos (custo $\times 4$, ganho $\div 2$).

8. (a) Cada elemento vale **1** (tem a característica) ou **0** (não tem) $\rightarrow$ a média desses 0/1 é a proporção p , e a variância é $p(1-p)$ (variância de Bernoulli) — logo p é uma média e pode usar-se a mesma maquinaria. (b) Erro padrão = $\sqrt{(0,44 \times 0,56 / 625)} = \sqrt{0,000394} \approx 0,0199 \rightarrow$ IC: $0,44 \pm 1,96 \times 0,0199 = 0,44 \pm 0,039 \rightarrow [0,401; 0,479]$, ou seja **[40,1 %; 47,9 %]** (margem $\approx 3,9$ pontos percentuais).

9. (a) $52\% \pm 3\% \rightarrow [49\%; 55\%]$ — o intervalo inclui o empate (50 %) e até desvantagem: **não se pode declarar vitória** com esta margem. (b) Com $\pm 1\%$: [51 %; 53 %] $\rightarrow$ acima de 50 % em todo o intervalo $\rightarrow$ **afirmação sustentada** (mais n = margem menor, ex. 7). (c) A margem só cobre o **erro de amostragem aleatória** — **viés** (não-respostas, amostra desequilibrada — ficha 10) fica **de fora**: um intervalo bonito sobre amostra enviesada continua errado.

10. (a) **Falso** — o intervalo em questão é sobre μ (parâmetro), não descreve indivíduos; para indivíduos seria $\bar{x} \pm 1,96\sigma$ (sem $\sqrt{n}$). (b) **Falso** — n maior deixa o intervalo **mais estreito à mesma confiança**; a confiança é uma **escolha** (nível), não um efeito de n . (c) **Falso** — σ desconhecido substitui-se por s (amostral, com $n - 1$ — ficha 11).

11. (a) O programa deve mostrar que **~95 dos 100 intervalos** contém 0 (= μ da população $N(0,1)$) — uns 5 falham: é a demonstração prática da **cobertura**. (b) Aumentar $n \rightarrow$ amplitudes **menores** ($\sigma/\sqrt{n}$); aumentar a confiança $\rightarrow$ **maiores** (z cresce de 1,645 a 2,576). (c) Porque mostra que «95 %» é uma **taxa de acerto do método** em repetições — exatamente a leitura correta do ex. 6, não uma afirmação sobre μ .

12. O IC **completa** o ponto: em vez de « $\mu \approx 50$ », dá « $\mu \in [46,08; 53,92]$ com 95 % de confiança» — incerteza declarada, não escondida. A largura responde a três alavancas: **confiança** (z : 1,645/1,96/2,576), **n** (por $\sqrt{n}$) e **dispersão** (σ ou s) — mais confiança e mais σ alargam; mais n estreita. E a frase certa («o **intervalo** contém μ », porque o aleatório está nos limites) é o que separa estatística séria de manchete: por ela se lê uma sondagem [49; 55] e se recusa a vitória com margem $\pm 3\%$ — o **juízo informado** que as AE pedem.

Nota: quatro blocos — **fórmulas e níveis** (1,96/1,645/2,576) · **leitura correta** · **alavancas (confiança, n , σ)** · **proporção e sondagens**. Liga: fichas 9–11 (normal, amostragem, TLC) · AT 16 (programa do IC) · prova global e simulado (leitura crítica).