

Teste de MACS — T1 Grafos e Populacionais

11.º Ano MACS 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: responde a todas as questões, apresentando sempre a justificação — classificar sem explicar vale metade do valor. Duração: 90 minutos. Cobre o Tema 1: modelos de grafos (Euler, Hamilton) e modelos populacionais (crescimentos e seleção de modelo).

Grupo I — Modelos de grafos (10 valores)

1. (2 valores) O grafo G tem vértices $\{A, B, C, D\}$, arestas $\{AB, AC, BD, CD\}$ e um laço em C . (a) Indica a ordem e o grau de cada vértice (lembra: laço conta 2). (b) Verifica que a soma dos graus é o dobro do número de arestas.
2. (2 valores) Aplica o Teorema de Euler e conclui: (a) grafos conexos com graus $\{3, 1\}$ · (b) grafo conexo com graus $\{3, 3, 1, 1\}$. Em cada caso: circuito, caminho ou impossível? E onde se começa e acaba quando existe caminho?
3. (2 valores) Eulerização: um grafo com quatro vértices todos de grau 3 (K_4 , 6 arestas). (a) Porque é impossível o percurso único? (b) Qual o mínimo de arestas a duplicar e que «regra» usas para escolher os pares?
4. (2 valores) Hamilton: (a) quantos circuitos hamiltonianos tem K_5 (5 cidades)? (b) Porque é que, ao contrário de Euler, não existe um critério simples de decisão — e o que se usa (árvore? heurística?) e com que garantia?
5. (2 valores) Modelação: a recolha de lixo de um bairro tem 5 cruzamentos e 7 troços. (a) O que é vértice e o que é aresta neste problema? (b) Sem calcular graus, escreve a pergunta exata que decidiria se dá para percorrer tudo sem repetir — e a resposta que darias ao responsável se ela fosse «não».

Grupo II — Modelos populacionais (10 valores)

6. (2 valores) Identifica os modelos: (a) tabela A: 10, 17, 24, 31 → que modelo e que taxa? (b) tabela B: 32, 48, 72, 108 → que modelo e que razão? (Aplica a «prova» certa a cada uma.)

7. (2 valores) Construir e prever: (a) um negócio ganha 6 clientes por mês e tem 40 em janeiro → escreve $f(x)$ e prevê os clientes em julho ($x = 6$). (b) Uma cultura duplica a cada 4 períodos partindo de 200 → escreve $g(x)$ e calcula em $x = 12$.

8. (2 valores) Com $f(x) = 100/(1 + 9e^{-x})$: (a) qual o valor inicial e qual K? (b) Descreve a forma da curva (o que acontece a meio e no fim). (c) Em que sentido este modelo «corrige» o malthusiano?

9. (2 valores) Escolhe o modelo (justifica em cada caso): (a) preço de um bilhete com aumento fixo anual · (b) adoção de uma app que satura no mercado · (c) tempo de aprendizagem (rápido no início, depois aperfeiçoamento lento).

10. (2 valores) Um ajuste deu $R^2 = 0,96$ e a previsão para o ano 10 diz 108 % de um indicador que é percentagem. (a) Explica porque é que o valor é impossível e o que o erro denuncia. (b) Que modelo e que passo extra propões antes de publicar a previsão (dois concretos)?

Reparto de valores: Grupo I $5 \times 2 = 10$ · Grupo II $5 \times 2 = 10$ → 20 valores. Base: fichas 1–5 · ATs 13–14 e 17 · resumo 1.

Soluções — Teste T1 Grafos e Populacionais (11.º Ano)

11.º Ano

MACS

Modelo de correção

1. (a) Ordem $4 \cdot \text{graus}$: $g(A) = 2$, $g(B) = 2$, $g(C) = 4$ (AC, CD + laço que vale 2), $g(D) = 2$. (b) Soma = $10 = 2 \times 5$ **arestas** (AB, AC, BD, CD + laço) ✓.
2. (a) $\{3, 1\}$: **2 ímpares** → **caminho** euleriano — começa num vértice de grau 3 e acaba no de grau 1 (ou ao contrário). (b) $\{3, 3, 1, 1\}$: **4 ímpares** → **impossível** (só 0 ou 2 servem).
3. (a) K_4 tem **4 vértices ímpares** (grau 3) → excede o limite de 2 → sem percurso único. (b) Mínimo de **2 arestas duplicadas** (cada duplicação corrige 2 vértices); escolhem-se os **pares de menor distância** (menor acréscimo de percurso) — é o critério da eulerização económica.
4. (a) $(5 - 1)/2 = 4/2 = 2$. (b) Não há um «teorema de Euler» para Hamilton: a existência depende da **estrutura toda** (graus ≥ 2 não bastam — ex.: dois triângulos num vértice); usa-se **árvore** (enumerar e comparar pesos, para poucos casos) ou **heurística** (vizinho mais próximo: rápido, **solução aceitável**, não ótima).
5. (a) Vértices = **cruzamentos** · arestas = **troços de rua**. (b) A pergunta é: «existem **0 ou 2 vértices de grau ímpar?**» (se sim e 0, circuito; se 2, caminho; se mais, impossível). Se a resposta fosse «não», proporia **eulerizar**: duplicar o mínimo de troços ligando os pares de ímpares — «senhores, são só M troços repetidos e fica uma rota fechada».
6. (a) Subtrações: $17 - 10 = 24 - 17 = 31 - 24 = 7$ (constante) → **linear**, $f(x) = 10 + 7x$. (b) Razões: $48/32 = 72/48 = 108/72 = 1,5$ (constante) → **exponencial**, $g(x) = 32 \cdot 1,5^x$.
7. (a) $f(x) = 40 + 6x \rightarrow f(6) = 40 + 36 = 76$ **clientes**. (b) $g(x) = 200 \cdot 2^{x/4} \rightarrow x = 12: 200 \cdot 2^3 = 1600$.
8. (a) $f(0) = 100/(1+9) = 10$ (inicial) · $K = 100$ (assíntota). (b) Curva em **S**: arranca devagar → cresce quase exponencial → abranda na inflexão ($K/2 = 50$) → estabiliza em K. (c) O malthusiano promete **explosão eterna**; o logístico reconhece o **teto** (capacidade de carga) — a correção é física, não matemática.
9. (a) **Linear** — acréscimo fixo por período. (b) **Logístico** — adoção com saturação (existe mercado máximo). (c) **Logarítmico** — muito no início, depois cada vez mais devagar, sem teto definido (aprendizagem).
10. (a) $108\% > 100\%$ é **logicamente impossível** — o modelo exponencial ignora que o indicador tem **teto** (o R^2 alto só prova ajuste na amostra, não verdade fora dela). (b) Propostas: (1) ajustar um **modelo logístico** ($K = 100\%$) para a saturação; (2) **consultar a fonte atualizada** (Pordata) e/ou restringir o horizonte da previsão ao curto prazo, declarando a **limitação** — publicar sem estas correções seria má ciência.

Nota de correção: cada justificação conta tanto como a resposta. **Autoavaliação:** 17–20 = tema fechado · 13–16 = revisão dirigida por grupo · menos de 13 = repetir fichas 1–5 e resumo 1. Base: fichas 1–5, ATs 13–14/17, resumo 1, flashcards 22.