

Ficha — Introdução aos grafos: pontos, linhas e o essencial das redes

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Reconhecer num grafo os vértices, as arestas, os laços e os vértices isolados, calcular a **ordem** e o **grau** dos vértices, identificar **caminhos e circuitos** e modelar situações de logística como sistemas de pontos e linhas.

Revisão rápida

Grafo = par $G = (V, A)$ — **V** vértices (pontos) e **A** arestas (linhas que ligam pares de vértices). **Modelar** = escolher o que é «ponto» e o que é «ligação» numa situação real, captando só o essencial (ruas, rotas, equipamentos, pessoas).

Conceito	Definição
Vértice (nó)	elemento (ponto) do sistema
Aresta	ligação entre dois vértices
Laço	aresta de um vértice para si mesmo — conta 2 no grau
Vértice isolado	sem arestas → grau 0
Vértices adjacentes	unidos por uma mesma aresta (não é «estar perto» no desenho!)
Ordem do grafo	número de vértices (não de arestas)
Grau de um vértice	número de arestas que nele incidem (laço conta 2)

Consequência-chave: cada aresta contribui 2 para a soma dos graus → $\text{soma dos graus} = 2 \times (\text{n}^\circ \text{ de arestas})$ — verificar sempre este «equilíbrio» no fim de um desenho.

Caminho = sequência de vértices **adjacentes** em que **nenhuma aresta se repete** (caminho simples: os vértices não repetem). **Circuito** = caminho que **parte e termina no mesmo vértice** — toda a volta fechada.

Estratégia: escolher V e A (o essencial) → calcular ordem e graus → verificar $\sum \text{graus} = 2a$ → procurar caminhos/circuitos → **interpretar** (quem está isolado? quem liga tudo?).

Exercícios

1. Completar: um grafo é um par (_____, _____) · a ordem é o número de _____ · o grau de um vértice é o número de _____ que nele incidem · um laço acrescenta _____ ao grau · um vértice isolado tem grau _____.

2. Modelar: numa rede de ruas de um bairro, que seria o vértice e o que seria a aresta? E numa rede de aeroportos com voos diretos? Justifica as duas escolhas (o «essencial» de cada situação).

3. Grafo G tem vértices {A, B, C, D} e arestas {AB, AC, AD, BD}. Indica a ordem, calcula o grau de cada vértice e o número de arestas — e confirma que a soma dos graus é o dobro das arestas.

4. Grafo H tem um laço em B, um vértice isolado E, e arestas AC, CD, DE (E deixa de estar isolado se DE existe — repensa: desenha H com arestas AC, CD e o laço em B, mais vértice E isolado). Calcula a ordem e os graus (A, B, C, D, E) e indica quem é adjacente de C.

5. Lista de adjacência de um grafo J: A: B, C · B: A, D · C: A, D · D: B, C. (a) Qual a ordem e quantas arestas? (b) Quais são os vértices adjacentes de D? (c) Há vértices isolados? E graus todos iguais — o que isso diz sobre a simetria da rede?

6. Caminho vs circuito: para o grafo J do exercício 5, escreve (a) um caminho simples de A a D e (b) um circuito que parte de A. (c) Pode um circuito repetir uma aresta? E num caminho simples?

7. Leitura de uma rede: localidades {Porto, Lisboa, Faro, Braga, Açores} com voos diretos: Porto–Lisboa, Lisboa–Faro, Faro–Açores, Lisboa–Açores — Braga não tem aeroporto nem voo direto. (a) Desenha/representa. (b) Ordens e graus. (c) Que vértice é «hub» (maior grau) e que vértice está isolado?

8. Logística: uma empresa quer uma rota que acesse todas as ruas de um quadrícula sem repetir troços. (a) Modela: vértices = _____, arestas = _____. (b) Escreve um caminho possível que use o maior número de troços. (c) Sê capaz de usar todos? Explica que informação falta (dica: os graus contam a história — ver ficha 2).

9. Interpretação crítica: o grafo de um sistema de recolha de lixo tem 6 bairros (vértices); as arestas indicam quais os pares de bairros servidos pelo mesmo camião por dia. (a) O vértice isolado significa o quê, na prática? (b) Que decisão de gestão se retira do grau de cada bairro? (c) O que o grafo não mostra (distâncias, trânsito)?

10. Erros: corrige (a) «o laço não conta para o grau» · (b) «a ordem é o número de arestas» · (c) «caminho e circuito são a mesma coisa» · (d) «num grafo, são adjacentes os vértices que estão mais próximos no desenho».

11. Aplicação (comunidade): um agrupamento quer ligar todas as freguesias com percursos de autocarro; o grafo atual tem uma freguesia isolada. (a) Que «melhoria» propões (uma aresta nova) e porque é que ela muda mais do que o desenho (efeito no caminho das restantes)? (b) Escreve a proposta em duas frases — como se apresentasse a um responsável.

12. Síntese: «Um grafo é um mapa sem distâncias.» Explica (4–5 linhas) como um sistema de pontos e linhas captura o essencial de um problema de logística, o que perde (geografia, tempos) e porque é que ordem e graus bastam para começar a tomar decisões (quem está isolado, quem liga tudo, que caminhos existem).

Soluções — Introdução aos grafos

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. (V vértices, A arestas) · ordem = nº de **vértices** · grau = nº de **arestas** · laço acrescenta 2 · isolado = grau 0.
2. Ruas: vértices = **cruzamentos** (ou quarteirões, conforme a questão) e arestas = **troços de rua** que ligam dois vizinhos. Aeroportos: vértices = **aeroportos** e arestas = **voos diretos** (cada aresta liga exatamente dois). A escolha muda a pergunta: em «troços» conta-se manutenção; em «voos» conta-se conectividade.
3. Ordem 4 (A,B,C,D). Graus: **g(A)=3** (AB, AC, AD), **g(B)=2** (AB, BD), **g(C)=1** (AC), **g(D)=2** (AD, BD). Arestas a = 4. Soma dos graus = $3+2+1+2 = 8 = 2 \times 4 \checkmark$.
4. H: vértices {A,B,C,D,E}, arestas {AC, CD} + laço em B. Ordem 5. Graus: **g(A)=1**, **g(B)=2** (o laço conta duplo), **g(C)=2** (AC, CD), **g(D)=1**, **g(E)=0** (isolado). Adjacentes de C: **A e D** (o laço de B não faz B ser adjacente de C). Verificação: $1+2+2+1+0 = 6 = 2 \times 3$ arestas $\checkmark$ (o laço é uma aresta).
5. (a) Ordem 4 · arestas: AB, AD, BD, CD $\rightarrow$ 4 (cada par da lista, contado uma vez). (b) Adjacentes de D: **B e C**. (c) Não há isolados; todos têm grau 2 $\rightarrow$ rede **regular** e simétrica (todos os vértices «têm o mesmo peso», ninguém é hub).
6. (a) Caminho simples $A \rightarrow B \rightarrow D$ ou $A \rightarrow C \rightarrow D$ (vértices distintos, arestas distintas). (b) Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ (parte e termina em A) — ou $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. (c) Pela definição de caminho, **não se repetem arestas**; num caminho **simples** nem vértices (exceto o inicial=final do circuito).
7. (a) $V = \{\text{Porto, Lisboa, Faro, Açores, Braga}\}$ (Braga é vértice isolado se não tem aeroporto/voos — aqui fica de fora das arestas). (b) Arestas: Po–Li, Li–Fa, Fa–Aç, Li–Aç. Graus: **g(Po)=1**, **g(Li)=3**, **g(Fa)=2**, **g(Aç)=2**, **g(Braga)=0** · ordem 5 · arestas 4 ($1+3+2+2+0 = 8 = 2 \times 4 \checkmark$). (c) Hub = **Lisboa** (grau 3); isolado = **Braga**.
8. (a) vértices = **cruzamentos**, arestas = **troços**. (b) Um caminho possível: percorrer os troços em sequência ligada, ex.: seguir o perímetro e ir «colando» cruzamentos sem repetir troços (registra a sequência de vértices). (c) A pergunta certa é **quantos vértices têm grau ímpar**: se forem mais de 2, não se fecha a volta sem repetir — é isso que o **Teorema de Euler** (ficha 2) responde; aqui a informação que falta são os **graus**.
9. (a) Vértice isolado = bairro **sem ligação direta** no plano diário (outro camião, ou esquecido) $\rightarrow$ decisão: rever a rota ou criar aresta. (b) Bairros de maior grau são os «de passagem obrigatória» (prioridade/eficiência); grau 1 = cabeça de linha (fim de percurso). (c) O grafo **não mostra distâncias, tempos, trânsito, capacidade do camião** — é qualitativo/estrutural («mapa sem distâncias»).
10. (a) Conta 2. (b) Ordem = nº de **vértices** (arestas não são ordem). (c) Circuito **é um caminho** que fecha — são noções diferentes (circuito fecha, caminho não obrigatoriamente). (d) Adjacentes = **unidos por aresta**, independentemente de estarem «perto» no desenho (numa planta, vizinhança $\neq$ adjacência).
11. (a) Propor uma **aresta nova** (autocarro direto) que ligue a freguesia isolada ao resto — e não só: essa aresta cria **caminhos curtos** para todas as freguesias vizinhas (o isolamento desaparece para todos os percursos que passavam pelo único acesso). (b) «Proponho ligar Freguesia X à rede existente através do eixo Y: hoje está isolada (grau 0), o que obriga a deslocações passando por Z. A nova ligação reduz o percurso das restantes freguesias e custa um só troço de percurso.»
12. Um grafo **captura** só duas coisas: **quem existe** (vértices) e **quem se liga a quem** (arestas) — descarta distâncias, tempos e geografia («mapa sem distâncias»). Para logística isso é o essencial: ordem = tamanho do sistema; graus = importância de cada ponto (isolado = problema, alto grau = hub); caminhos/circuitos = rotas possíveis. Com isto já se decidem coisas reais («onde falta ligação?», «por onde passam todos?») — e só depois é que se acrescentam distâncias e custos (fichas 3–4).

Nota: quatro blocos — **conceitos e graus** · **modelar V/A** · **caminho e circuito** · **leitura crítica e proposta**. Liga: ficha 2 (Teorema de Euler, graus ímpares) · AT 13 (matriz de adjacência) · AT 17 (projeto de grafos).