

Ficha — Grafos de Hamilton: visitar todos os pontos e otimizar rotas

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Definir e caracterizar um **circuito de Hamilton**, reconhecer quando existe (e porque não há «teorema simples»), enumerar circuitos com **árvores**, resolver o **problema do caixeiro viajante** e construir **algoritmos** que dêem soluções aceitáveis — discutindo a otimização de recursos.

Revisão rápida

Circuito de Hamilton = circuito que passa por **todos os vértices exatamente uma vez** (e volta ao início). Inspirado no jogo de **Hamilton (1857)** (percorrer todos os pontos de um poliedro uma só vez). O **problema do caixeiro viajante**: encontrar o circuito hamiltoniano de **menor peso** (distâncias, custos).

	Euler (ficha 2)	Hamilton (esta ficha)
O que se percorre	arestas (todas, uma vez)	vértices (todos, uma vez)
Teste para existir	Teorema de Euler: contar graus pares/ímpares	não há critério equivalente — tenta-se e compara-se
Pesos?	irrelevante	central (distância/custo nas arestas)

Quando existe (suficientes): o grafo **completo** K_n ($n \geq 3$, todos ligados) sempre tem — e vale a condição de **Dirac**: $n \geq 3$ e todo o vértice com grau $\geq n/2 \rightarrow$ existe circuito (suficiente, **não obrigatório**). Em geral, se algum vértice tem **grau 1** ou está isolado da restante rede, é **impossível** (um ponto de passagem exige grau ≥ 2).

Contagem: em K_n há $(n - 1)! / 2$ circuitos hamiltonianos (dividimos por n pontos de partida e por 2 sentidos) — ex.: 5 cidades $\rightarrow 4!/2 = 12$; 10 cidades $\rightarrow 9!/2 = 181\,440$; 20 cidades $\rightarrow 19!/2 \approx 6,1 \times 10^{16} \rightarrow$ **enumerar nunca**, usa-se **árvores e algoritmos**.

Estratégia: representar (vértices = locais, arestas = ligações com **peso**) $\rightarrow$ garantir que **existe** (grau ≥ 2 , o grafo completo é o seguro) $\rightarrow$ **enumerar com árvore** (poucos casos) ou **heurística** (muitos) $\rightarrow$ comparar pesos $\rightarrow$ **discutir** (km, combustível, poluição, lucro) e justificar a «solução aceitável».

Exercícios

1. Completar: um circuito de Hamilton visita todos os _____ exatamente _____ vez e regressa ao _____. Em Euler percorrem-se todas as _____. Em K_n há _____ circuitos de Hamilton, contando _____ e _____ diferentes.

2. Decide se estes grafos têm circuito de Hamilton e justifica: (a) pentágono (5 vértices em coroa, todos grau 2) · (b) estrela com centro A e ramos B, C, D (graus 3, 1, 1, 1) · (c) K_4 (4 vértices todos ligados).

3. Contagem: quantos circuitos hamiltonianos tem (a) K_5 (b) K_6 ? Explica a origem da fórmula $(n - 1)!/2$ (o que se «divide» e porque) e calcula o valor para 10 cidades.

4. Caixeiro viajante: 4 cidades completas com distâncias A–B 10, B–C 15, C–D 12, D–A 10, A–C 25, B–D 20 (km). Enumera os 3 circuitos hamiltonianos a partir de A, calcula os pesos totais e indica o melhor — e o que faz com que ele vença.

5. Árvore combinatória: para as mesmas 4 cidades, desenha a árvore das escolhas a partir de A (1.ª etapa: B ou C; depois os restantes), escreve os circuitos completos e os seus pesos totais. Porque é que a árvore «não deixa escapar» nenhuma solução?

6. Heurística do vizinhança mais próxima: com distâncias A–B 10, B–C 11, C–D 12, D–A 40, A–C 20, B–D 30, começa em A e vai sempre para a cidade mais próxima por visitar. (a) Que circuito obténs e quanto pesa? (b) Enumera os 3 circuitos: há algum melhor? (c) Conclusão sobre a heurística («aceitável», não «garantida»).

7. Comparação: preenche — Euler: percorre _____, usa o teorema dos _____, ignora pesos · Hamilton: percorre _____, não tem teorema equivalente, depende dos _____. Porque é que um se resolve por contagem e o outro exige procura?

8. Otimização: para que serve encontrar o menor circuito? Indica dois critérios além do «menor km» (o documento sugere custo, poluição, lucro) e explica porque é que otimizar é uma decisão económica e não só matemática.

9. Impossibilidade: dois triângulos que se tocam num vértice X ($ABCX$ e XDE) — todos os vértices têm grau ≥ 2 . (a) Porque é que não existe circuito de Hamilton (dica: para sair de um «ala» e voltar a passar por X terias de passar por X duas vezes)? (b) Que «consequência» prática: grau ≥ 2 é necessário mas não suficiente.

10. Erros: corrige (a) «se todos os graus ≥ 2 , existe sempre circuito de Hamilton» · (b) «o teorema de Euler serve para escolher a rota mais curta» · (c) «a heurística do vizinho mais próximo dá sempre a solução ótima» · (d) «em K_n há $n!$ circuitos de Hamilton».

11. Aplicação: uma distribuidora tem 5 centros ($A\dots E$) com distâncias e quer uma rota que visite todos e volte a A . (a) Que garantia de existência procura (graus? completo?)? (b) Com árvore ou heurística, como obter uma «solução aceitável» sem testar 12 circuitos? (c) Que dados faltam além das distâncias (tempos, custo, horários) — e o que isso implica para a decisão?

12. Síntese: «Euler conta, Hamilton procura.» Explica (4–5 linhas) a diferença entre decidir a existência de um percurso por graus e decidir a melhor rota por procura de pesos, porque é que $(n-1)!/2$ torna a enumeração impossível, e como árvores e algoritmos dão «soluções aceitáveis» para decidir.

Soluções — Grafos de Hamilton

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. **vértices** · **uma** · **início** · **arestas** · $(n - 1)!/2$ · pontos de **partida** · **sentidos** de percurso.

2. (a) **Sim** — a coroa é um circuito que fecha em si própria (grau 2 em todos). (b) **Não** — os ramos têm **grau 1**: para visitar um ramo e sair seria preciso repetir a aresta/vértice. (c)

Sim — K_4 é completo (Dirac: $n=4 \geq 3$, graus $3 \geq 4/2 = 2$) — qualquer ordenação dá um circuito.

3. (a) K_5 : $(5 - 1)!/2 = 4!/2 = 12$. (b) K_6 : $5!/2 = 60$. Origem: começando num ponto fixo há $(n - 1)!$ ordenações dos restantes (permutações), mas cada circuito conta-se **2 vezes** (dois sentidos) → divide-se por 2. Para 10 cidades: $9!/2 = 181\,440$.

4. Circuitos a partir de A: $ABCD A = 10 + 15 + 12 + 10 = 47$ km · $ABDCA = 10 + 20 + 12 + 25 = 67$ · $ACDBA = 25 + 12 + 20 + 10 = 67$. Melhor: $ABCD A = 47$ km — vence porque usa as arestas do **perímetro** e evita as duas diagonais caras (25 e 20).

5. Árvore: raiz A → (B, C) → no B: (C, D) → no C: (D) → fecha; ramo A→C→(B, D)→... Cada nível escolhe **um vértice ainda por visitar** e cada folha fecha em A → obtêm-se os 3 circuitos de (4) com os pesos 47, 67, 67. A árvore não deixa escapar nada porque **explora todas as escolhas sucessivas** — é a enumeração sistemática (para n grande deixa de ser prática: 181 440 folhas em 10 cidades!).

6. (a) A → B (10) → C (11) → D (12) → A (40) = **73**. (b) Circuitos: $ABCD A = 10+11+12+40 = 73$ · $ABDCA = 10+30+12+20 = 72$ · $ACDBA = 20+12+30+10 = 72$. Sim — há melhores (72). (c) A heurística deu uma **solução aceitável (73)**, **não a ótima (72)**: escolher sempre o mais próximo **não olha para o regresso** (acabou «preso» no D→A de 40). É o que a heurística faz: rápido e bom, mas **sem garantia** — por isso se comparam soluções.

7. Euler: percorre **arestas** · graus **pares/ímpares** · Hamilton: percorre **vértices** · **pesos** das arestas. Um resolve-se por **contagem** (o teorema decide de uma vez); o outro exige **procura** porque a existência depende da **estrutura toda** (não há um número que baste) e a otimização exige **comparar** $(n - 1)!/2$ possibilidades.

8. Serve para **menor custo** (combustível, horas, desgaste), **menos poluição** (CO_2), **mais lucro/preços mais baixos** e cumprir horários. É uma decisão económica porque **limita recursos** (tempo, dinheiro, energia) e há **trade-offs** (rota mais curta pode falhar horários) — a matemática fornece os números, a decisão pondera-os (cidadania, sustentabilidade).

9. (a) Qualquer circuito hamiltoniano tem de entrar e sair de cada «ala» passando por X — visitar X duas vezes **viola a regra**; logo não existe. (b) Exato: grau ≥ 2 é **necessário** (um ponto de passagem precisa de entrada e saída) mas **não basta** — a **conexão global** (neste caso, X ser «pescoço») também decide. Sem teorema como o de Euler, testa-se a estrutura.

10. (a) **Falso** — contraexemplo: dois triângulos num vértice (ex. 9). (b) **Falso** — Euler decide **se** existe percurso pelas arestas; a «rota mais curta» é o problema de **Hamilton** (pesos). (c) **Falso** — é heurística: soluções **aceitáveis**, não garantidas (ex. 6: 73 vs 72). (d) **Falso** — é $(n - 1)!/2$ (a divisão remove partida repetida e sentidos repetidos).

11. (a) Procurar que todos os vértices têm **grau ≥ 2** e que o grafo é «bem ligado» — a garantia segura é o **grafo completo** (ou Dirac: graus $\geq n/2$). (b) Com **heurística do vizinho mais próximo** (rápida, uma passagem) e depois **melhorar** (trocar arestas se reduzir) — em vez de 12 circuitos, uma exploração guiada; ou **árvore podada** (só os ramos que ainda podem vencer). (c) Faltam **tempos, custos/hora, horários de entrega, limites do veículo** → a decisão passa a ser multiobjetivo (menor km vs chegar a horas) — é por isso que «solução aceitável» é negociada, não calculada.

12. «Euler **conta**»: basta somar graus para saber se há percurso — o teorema fecha a questão de uma vez. «Hamilton **procura**»: não há número que decida (grau ≥ 2 não basta); com $(n - 1)!/2$ circuitos (10 cidades = 181 440; $20 \approx 6,1 \times 10^{16}$) a enumeração explode — por isso se usam **árvores** (sistemizam sem esquecer) e **algoritmos/heurísticas** (vizinho mais próximo) que dão rapidamente uma **solução aceitável**, depois comparada e discutida (custos, poluição, lucro). A diferença é de natureza: um é **decisão por critério**, o outro é **otimização por procura** — e é assim que as empresas decidem rotas todos os dias.

Nota: quatro blocos — **definição vs Euler** · **contagem $(n-1)!/2$** · **caixeiro viajante, árvores e heurística** · **impossibilidade e decisão**. Liga: ficha 1 (graus) · ficha 2 (Euler) · AT 13 (teorema em tecnologia) · AT 17 (projeto de grafos).