

Ficha — Grafos de Euler: atravessar cada aresta uma vez só

11.º Ano MACS 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: Distinguir caminho de circuito **euleriano**, aplicar o **Teorema de Euler** (graus pares e ímpares) para decidir a existência de percursos, resolver o problema de **Königsberg** (1736) e **eulerizar** redes de logística (carteiros, recolha de lixo, patrulhamento).

Revisão rápida

Caminho euleriano = percurso que atravessa **cada aresta exatamente uma vez** (vértices podem repetir-se!). **Circuito euleriano** = caminho euleriano que **parte e termina no mesmo vértice** — a volta completa.

Teorema de Euler (gráfico conexo)	Conclusão
todos os vértices de grau par (0 ímpares)	circuito euleriano — começa onde quiseres
exatamente 2 vértices de grau ímpar	caminho euleriano — começa num ímpar e acaba no outro
4 ou mais ímpares (ou outro nº ímpar)	impossível — sem caminho nem circuito

Königsberg, 1736 (Euler): 4 territórios e 7 pontes → graus **5, 3, 3, 3** — **os quatro ímpares** (soma $14 = 2 \times 7$) → **impossível** atravessar as 7 pontes uma vez cada. Reduzir a cidade a pontos e linhas criou a **teoria dos grafos** (e abriu a topologia) — o **desenho** (distâncias, ângulos) não interessa; contam-se **graus**.

Eulerização: quando o teorema diz «impossível», **acrescentar percursos** (duplicar arestas) até todos os graus ficarem **pares** — objetivamente: **emparelhar os vértices ímpares** com o menor acréscimo. É o que fazem **carteiros, recolha de lixo, limpeza de ruas e patrulhamentos** (troços repetidos, uma só vez).

Atenção: Euler trata **arestas** (trilhas, ruas, pontes) — o circuito que trata **vértices** é o de **Hamilton** (ficha 3). Não confundir: aqui não se exige visitar «todos os pontos», exige-se passar por **todas as ligações**.

Estratégia: desenhar o grafo → contar **graus** → quantos ímpares? (0 → circuito · 2 → caminho · resto → impossível) → se impossível, **eulerizar**.

Exercícios

1. Completar: um caminho euleriano atravessa cada _____ exatamente _____ vez · se todos os graus são _____ e o grafo é _____, existe _____ euleriano · com exatamente _____ vértices ímpares existe só um caminho, que começa e acaba _____.

2. Königsberg: os quatro territórios têm graus 5, 3, 3, 3. Explica, pela contagem dos ímpares, porque é impossível atravessar as 7 pontes uma vez cada — e porque é que dar «um passeio» (começar e acabar onde quiser) também não salva a situação.

3. Decide, para grafos conexos com estes graus: (a) {4, 2, 2} · (b) {3, 3, 1, 1} · (c) {3, 1}. Em cada caso: circuito, caminho ou impossível? E onde começa e termina o percurso?

4. Grafo K, vértices {A,B,C,D}, arestas {AB, BC, CD, DA, AC}. (a) Calcula os graus. (b) Aplica o teorema e decide. (c) Com 0 ou 2 ímpares, que liberdade tens na escolha do ponto de partida?

5. Redes do quotidiano: para cada situação, diz o que é vértice e aresta e aplica o teorema — (a) troços de rua num bairro quadrangular (4 cruzamentos, 6 troços) · (b) uma coroa de 5 ligações de estrada entre 5 aldeias em círculo · (c) pontes de uma cidade com graus (4, 4, 3, 3).

6. Kaliningrad (antiga Königsberg) tem hoje 5 pontes: dois territórios com grau 2 e dois com grau 3. (a) Conclusão pelo teorema (repara: quantos ímpares?). (b) Onde tem de começar e acabar o passeio? (c) Em 1736 havia 7 pontes e era impossível — que «correção» de graus bastou (de 5,3,3,3 a 4,2,3,3, por exemplo, retirar uma ponte)?

7. Eulerização: um grafo tem vértices de graus {3, 3, 5, 3} (todos ímpares — 4 ímpares). (a) Quantas arestas precisas de duplicar, no mínimo, para todos ficarem pares? (b) Que pares de vértices convém emparelhar (regra do menor acréscimo)? (c) Descreve o processo por palavras.

8. Recolha de lixo: a rota percorre cada troço uma só vez. Dada a rede {cruzamentos: A,B,C,D; troços: AB, BC, CD, DA, BD}, (a) calcula graus e aplica o teorema; (b) se for impossível, indica que troço há de repetir e porque.

9. Patrulhamento: num parque há 4 zonas ligadas por 5 percursos; dois vértices têm grau ímpar e os outros dois têm grau par. (a) Existe percurso sem repetir? (b) Se sim, onde se começa? (c) E se fossem três ímpares — o teorema permitia? Justifica com a «conta das entradas e saídas» (cada vértice de passagem exige grau par).

10. Erros: corrige (a) «num caminho euleriano não se podem repetir vértices» · (b) «se três vértices têm grau ímpar, começa-se num deles e acaba-se noutro» · (c) «Euler resolve o problema de visitar todas as cidades» · (d) «o teorema de Euler vale para grafos com partes desconexas».

11. Decisão prática: uma empresa de limpeza modelou a rede com 6 vértices e obteve 4 vértices ímpares. (a) O que diz o teorema? (b) Duas soluções possíveis (um desenho de cada): eulerizar (repetir o mínimo) vs aceitar dois percursos — qual preferes e porquê (km extra vs tempo)? (c) Escreve a resposta em duas frases, como para um responsável.

12. Síntese: «Em 1736, Euler apagou as ruas e deixou só pontos e linhas.» Explica (4–5 linhas) como é que contar graus pares e ímpares decide a possibilidade de um percurso, porque é que o desenho é indiferente, e que relação tem isto com as redes de hoje (recolha, patrulhamento, circuitos impressos).

Soluções — Grafos de Euler

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. cada aresta · uma · pares · conexo · circuito · 2 · nos dois vértices ímpares.

2. Com 4 vértices ímpares (5, 3, 3, 3 — soma $14 = 2 \times 7$ ✓) ultrapassa-se o limite de 2: um vértice ímpar só «funciona» como **ponto de partida** (sai mais uma vez do que entra) ou de **chegada** (entra mais) — havendo 4, dois ficariam sem papel. E «começar e acabar onde quiser» **fecha** o percurso (circuito): isso exige **todos os pares**, e aqui há 4 ímpares → **nenhuma solução** (Euler, 1736).

3. (a) 0 ímpares → **circuito** (começa em qualquer vértice). (b) 4 ímpares → **impossível**. (c) 2 ímpares → **caminho** que começa nos vértices de grau 3 e termina no outro (ou vice-versa) — as extremidades obrigatórias.

4. (a) Com arestas {AB, BC, CD, DA, AC}: $g(A)=3$ (AB, DA, AC) · $g(B)=2$ · $g(C)=3$ (BC, CD, AC) · $g(D)=2$ — soma $10 = 2 \times 5$ ✓. (b) 2 ímpares (A e C) → **caminho euleriano** (começa em A, acaba em C — ou ao contrário). (c) Com 2 ímpares a partida é **obrigatória num deles** e a chegada no outro; com 0 ímpares (circuito) podes escolher **livremente**.

5. (a) vértices = cruzamentos, arestas = troços; com 4 cruzamentos e 6 troços (todos ligados: quadrado + diagonais) os graus são {3,3,3,3} → 4 ímpares → **impossível** sem repetir. (b) coroa de 5 em círculo: todos grau 2 → 0 ímpares → **circuito** (dá a volta toda). (c) graus (4, 4, 3, 3) → 2 ímpares → **caminho**, começando/terminando nos de grau 3.

6. (a) Hoje: graus 2, 2, 3, 3 → **exatamente 2 ímpares** → **caminho euleriano existe**. (b) Começa e acaba nos **dois territórios de grau 3**. (c) Com 7 pontes os graus eram 5, 3, 3, 3 (4 ímpares); **retirar uma ponte** reduz em 1 **os dois territórios** que ela ligava → ex.: 4, 2, 3, 3 → só 2 ímpares → o passeio passa a existir (é exatamente o que aconteceu com as pontes destruídas).

7. (a) 4 ímpares → precisas de **emparelhá-los 2 a 2** → **2 arestas duplicadas** (o mínimo: cada duplicação «corrige» exatamente 2 vértices). (b) Escolher os pares de **menor distância** no grafo (menor acréscimo de percurso). (c) Repetir um troço entre cada par de ímpares até todos ficarem pares → já há circuito.

8. (a) Com arestas {AB, BC, CD, DA, BD}: $g(A)=2$ · $g(B)=3$ (AB, BC, BD) · $g(C)=2$ · $g(D)=3$ (CD, DA, BD) — soma $10 = 2 \times 5$ ✓. Há 2 ímpares (B e D) → existe **caminho euleriano** (começa em B e acaba em D, ou vice-versa) — **não é preciso repetir troço**. (b) Se se exigisse um **circuito** (volta ao ponto de partida), aí sim seria preciso repetir um troço ligando B e D (a eulerização mínima).

9. (a) Sim — 2 ímpares → caminho euleriano. (b) Começa num dos vértices **de grau ímpar** e acaba no outro. (c) **Não** — e há um detalhe que fecha a questão: o número de vértices de grau ímpar é **sempre par** (a soma dos graus = $2a$), logo 3 ímpares nem sequer podem existir num grafo. Com 4 ou mais é impossível: cada passagem intermédia exige **entrada = saída** (grau par); só as extremidades podem ter «um a mais» — e há duas extremidades, não quatro.

10. (a) **Falso** — vértices podem repetir-se; quem não se repete são as **arestas**. (b) **Falso** — só vale para 0 ou 2 ímpares; com 3 (ou qualquer outro número) é impossível. (c) **Falso** — Euler é sobre **arestas** (trilhas); visitar vértices é o problema de **Hamilton** (ficha 3). (d) **Falso** — o teorema exige grafo **conexo** (sem isso, um percurso único não atravessa tudo).

11. (a) 4 ímpares → **sem percurso único**. (b) *Eulerizar*: duplicar 2 troços (os emparelhamentos mais curtos) → um só circuito, com km extra mínimos · *Dois percursos*: partir a rede ao meio (sem repetição nenhuma, 2 equipas). (c) «Proponho eulerizar ligando os pares X–Y e W–Z: são só 2 troços repetidos e fica um circuito único — menos custo do que manter duas equipas. Se a rede crescer, reavaliar.»

12. Euler **apagou geometria** (distâncias, forma do rio) e deixou só **pontos e ligações** — e mostrou que a existência de um percurso depende **só dos graus**: 0 ímpares → circuito; 2 → caminho; mais → impossível. «Par» significa equilíbrio entrada/saída (passar exige entrar e sair); «ímpar» é um desequilíbrio que só serve de extremidade. O truque é o mesmo hoje em redes reais: recolha de lixo, limpeza, patrulhamento e percursos de impressoras decidem rotas por **contagem de graus**, e quando falha, **eulerizam** (repetem o mínimo) — de 1736 para cá, a cidade virou rede e a rede mantém a mesma conta.

Nota: quatro blocos — **teorema (pares/ímpares)** · **Königsberg e casos · eulerização** · **leitura crítica e decisão**. Liga: ficha 1 (graus) · ficha 3 (Hamilton: vértices) · AT 13 (teorema em tecnologia) · AT 17 (projeto).