

Ficha — Fenómeno aleatório e probabilidade: o padrão no incerto

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Distinguir **fenómenos aleatórios e determinísticos**, construir um **modelo de probabilidade** (espaço de resultados, acontecimentos), interpretar a probabilidade **frequencista** e aplicar **axiomas, união e regra de Laplace** a situações do quotidiano.

Revisão rápida

Aleatório ≠ caos: as realizações individuais são **incertas**, mas existe um **padrão genérico** — daí a Teoria da Probabilidade construir **modelos matemáticos** que descrevem a **regularidade estatística** observada numa longa série de repetições (nas mesmas condições).

Conceito	Definição
Determinístico	lei física que explica o resultado (movimento de um carro; queda de uma maçã)
Aleatório	difícil de descrever por lei física (face do dado; nº de irmãos de um aluno; temperatura máxima futura)
Experiência aleatória	a realização do fenómeno (lançar o dado)
Espaço de resultados S	conjunto dos resultados possíveis ($\{1,2,3,4,5,6\}$)
Acontecimento	subconjunto de S (os resultados favoráveis)
Modelo de probabilidade	resultados possíveis + probabilidade atribuída a cada um

Frequencista: $P(A)$ = valor em que **estabiliza** a frequência relativa n_A/n em **muitas** repetições, nas mesmas condições. Regras: cada probabilidade entre **0 e 1** · a soma das elementares é **1** · $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ · **Laplace** (equiprováveis): $P(A) = \text{favoráveis} / \text{possíveis}$.

Acontecimentos: certo ($P = 1$) · impossível ($P = 0$) · elementar vs composto · **disjuntos** (não coexistem) vs **contrários** (disjuntos que esgotam S : $P(A) + P(\text{contrário}) = 1$) · **união** ($\cup$) vs **interseção** ($\cap$).

Estratégia: escrever $S \rightarrow$ escrever o acontecimento (subconjunto) $\rightarrow$ decidir método (Laplace se equiprováveis; senão, frequência) $\rightarrow$ calcular $\rightarrow$ **interpretar** (nunca «vai acontecer» — só «com que regularidade»).

Exercícios

1. Completar: as realizações de um fenómeno aleatório são _____, mas o comportamento é _____ · o espaço de resultados é o conjunto dos resultados _____ · um acontecimento é um _____ do espaço de resultados · $P(A)$ é o valor em que estabiliza a razão _____.

2. Classificar e justificar (dificuldade de achar lei física): (a) queda de uma maçã · (b) temperatura máxima amanhã · (c) número de irmãos de um aluno escolhido ao acaso · (d) face do dado · (e) a distância que atinge um projétil lançado com velocidade e ângulo conhecidos (sem vento).

3. Vocabulário com o dado: escreve S e representa como acontecimentos: (a) «sair uma face par» · (b) «sair pelo menos 5» · (c) «sair mais de 6». Indica os resultados favoráveis de cada e o tipo de acontecimento (certo/impossível/composto).

4. Frequencista: lançamentos de um dado $\rightarrow$ face 1 apareceu 98 vezes em 600. (a) Calcula n_A/n e compara com $1/6 \approx 0,1667$. (b) O que significa «estabilizar»? Porque são precisas muitas repetições e mesmas condições?

5. Axiomas: (a) porque é que P nunca sai de $[0, 1]$? (b) Verifica que as probabilidades das faces do dado ($6 \times 1/6$) e da moeda ($1/2 + 1/2$) somam 1 — o que seria errado numa atribuição com soma 0,8? (c) $P(\text{«sair 7 num dado»}) = ?$

6. Tipos de acontecimentos no dado: (a) $A = \text{«sair 1 ou 2»}$ é elementar ou composto? (b) «par» e «ímpar» são disjuntos? contrários? (c) $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$ são disjuntos? Justifica com a interseção.

7. União com Venn: com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ (dado equilibrado), calcula $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e usa a fórmula da união para obter $P(A \cup B)$ — confirma contando os resultados favoráveis de $A \cup B$.

8. Regra de Laplace: saco com 3 bolas vermelhas e 2 azuis (bolas iguais, bem misturadas). (a) $P(\text{azul})$, $P(\text{vermelha})$, $P(\text{branca})$? (b) Enuncia a regra (favoráveis/possíveis) e as condições para a usar.

9. Quando não dá para dividir: um dado tem pintas desiguais (peso diferente) — porque é que $1/6$ pode estar errado? (b) Que método salva (frequentista) e o que se admite «à partida» quando não há razão para achar resultados desiguais (equiprobabilidade)?

10. Erros: corrige (a) « $P(A)$ é o número de vezes que A aconteceu» · (b) «num dado, $P(\text{maior que } 6)$ é pequena, mas não é zero» · (c) « $P(A) + P(B)$ dá sempre 1» · (d) «um acontecimento aleatório não pode ser descrito matematicamente».

11. Juízo com probabilidades: numa rifa com 500 bilhetes há 1 premiado. (a) Calcula $P(\text{ganhar})$ e exprime em percentagem. (b) Com 100 participantes da escola, quantos prémios se esperam (valor esperado informal)? (c) Escreve uma frase de decisão informada (jogar ou não) usando estes números — sem promessas.

12. Síntese: «O aleatório não é o caos.» Explica (4–5 linhas) como um fenómeno de realizações incertas pode ter padrão genérico, o que o modelo de probabilidade (S + probabilidades) captura, e porque é que a leitura é sempre estatística («com que regularidade», nunca «vai acontecer») — porta de entrada para a condicionada (ficha 7) e para a simulação em Python (AT 15).

Soluções — Fenómeno aleatório e probabilidade

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. incertas · padrão genérico/regularidade estatística · possíveis · subconjunto · n_A/n .

2. (a) **Determinístico** — a queda tem lei física (gravidade). (b) **Aleatório** — a temperatura futura não tem lei simples aplicável (muitas variáveis). (c) **Aleatório** — escolha ao acaso, incerta. (d) **Aleatório** — face do dado. (e) **Determinístico** — as leis da cinemática dão a trajetória (sem perturbações). *Critério do documento: a dificuldade em arranjar lei física que descreva o fenómeno.*

3. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (a) favoráveis $\{2, 4, 6\} \rightarrow$ composto, $P = 3/6 = 1/2$. (b) favoráveis $\{5, 6\} \rightarrow$ composto, $P = 2/6 = 1/3$. (c) favoráveis $\{\}$ $\rightarrow$ **impossível**, $P = 0$.

4. (a) $98/600 \approx 0,163$ (muito próximo de $1/6 \approx 0,1667$). (b) «Estabilizar» = o valor de n_A/n oscila cada vez menos em torno de um número, à medida que n cresce. Com poucas repetições a oscilação é grande (6 lançamentos podem dar 3 caras); **mesmas condições** porque mudar o dado/tabela muda o próprio modelo.

5. (a) Porque é uma **frequência relativa** (razão entre contagens) — o máximo é tudo acontecer (1) e o mínimo nada (0). (b) Soma 1 = **exaustividade**: todos os resultados atribuídos; com soma 0,8 faltaria «20 %» de probabilidades por atribuir (ou estaria mal normalizado) — incoerente. (c) $P = 0$ (impossível — não está em S).

6. (a) **Composto** (união de dois elementares $\{1\}$ e $\{2\}$). (b) São **disjuntos** (interseção vazia) e, como esgotam S, também são **contrários** ($1/2 + 1/2 = 1$). (c) **Não** — $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ (não são disjuntos; $P(A \cap B) = 1/6$).

7. $P(A) = 3/6 = 1/2$. $P(B) = 3/6 = 1/2$. $P(A \cap B) = P(\{3\}) = 1/6$. União: $P(A \cup B) = 1/2 + 1/2 - 1/6 = 5/6$. Confirmação contando: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow 5/6 \checkmark$ — a subtração existe para não contar o «3» duas vezes.

8. (a) $P(\text{azul}) = 2/5$. $P(\text{vermelha}) = 3/5$. $P(\text{branca}) = 0$ (impossível). (b) **Probabilidade de A = nº de resultados favoráveis a A ÷ nº de resultados possíveis**, válida quando os resultados são **equiprováveis** (bolas iguais e bem misturadas).

9. (a) Se as faces têm pesos diferentes, os acontecimentos **não são equiprováveis** — dividir por 6 dá errado (a face mais pesada sai com mais frequência). (b) Salva a abordagem **frequencista**: lançar muitas vezes e medir a estabilização de n_A/n . E, como regra de trabalho, **admite-se a equiprobabilidade quando não há razão para o contrário** (é o pressuposto honesto de Laplace).

10. (a) **Falso** — isso é a **frequência** numa série finita; $P(A)$ é o valor de **estabilização** (não é uma contagem concreta). (b) **Falso** — «maior que 6» é **impossível**: $P = 0$ (não é «pequena»). (c) **Falso** — só se A e B forem **contrários** (esgotam S); em geral soma-se $P(A \cup B)$, com a interseção a corrigir. (d) **Falso** — é exatamente para descrevê-lo que existe a Teoria da Probabilidade (modelos matemáticos da regularidade).

11. (a) $P(\text{ganhar}) = 1/500 = 0,002 = 0,2 \%$. (b) $100 \times 0,002 = 0,2$ **prémios** (em média, 1 prémio por cada 500 bilhetes — na prática, ou ganhas ou não). (c) «Com 0,2 % por bilhete, ganhar é um acontecimento **extremamente raro**: por 100 bilhetes, a média esperada é de 0,2 prémios — decide com base nesse número, não na sensação de 'está para sair'».

12. Realizações **incertas** individualmente, mas com **regularidade estatística**: a frequência estabiliza (ex. 4: $0,163 \approx 1/6$) — é isso que o modelo captura: S (o que pode sair) + **probabilidades** (com que regularidade). Daí a leitura ser **estatística**: «com que frequência» e nunca «vai acontecer» (o caso concreto é imprevisível; o padrão é mensurável). É a porta da **probabilidade condicionada** (informação atualiza probabilidades — ficha 7) e da **simulação** (Python conta e verifica a estabilização — AT 15).

Nota: quatro blocos — **aleatório vs determinístico** · **vocabulário (S, acontecimentos)** · **frequencista e axiomas** · **união e Laplace**. Liga: ficha 7 (condicionada) · ficha 8 (v.a. e f.m.p.) · AT 15 (simulação em Python) · resumo 2.