

Ficha — Crescimento logarítmico e logístico: quando o crescimento abranda

11.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Caraterizar os crescimentos **logarítmico** e **logístico** (capacidade de carga K), comparar os **quatro modelos** de crescimento, **selecionar o modelo adequado** a um fenómeno com os dados disponíveis e compreender as **limitações** da adequação de modelos teóricos a situações reais.

Revisão rápida

Modelo	Fórmula	Comportamento
Linear	$f(x) = ax + b$	acrescenta sempre o mesmo (reta)
Exponencial	$f(x) = a \cdot b^x$	multiplica sempre (dispara)
Logarítmico	$f(x) = a + b \cdot \ln x$	cresce sempre, mas cada vez mais devagar (não tem teto — só «anda devagar»)
Logístico	$f(x) = K / (1 + a \cdot e^{-bx})$	curva em S : lenta → quase exponencial → desacelera → estagna em K

Logístico (Verhulst, 1838): K = **capacidade de carga** (assíntota — o teto do ambiente) · inflexão (ponto de «máxima velocidade») em $K/2$ · abaixo disso acelera, acima disso desacelera até tocar K . É o **correto do malthusiano**: a exponencial não continua para sempre — há recursos.

Escolher o modelo = cruzar **dados** (tabela/gráfico) e **natureza do processo** (há teto? taxa fixa? taxa percentual?), considerando a **previsível variação no tempo** e o **objetivo** (prever 1 ano ou 207?). **Mesma situação, modelos diferentes** — cada um tem vantagens (simplicidade vs realismo).

Limitações (obrigatório): nenhum modelo teórico é a realidade — políticas, crises, tecnologia mudam o processo; o modelo **aproxima** e serve para **discutir**, não para decretar. Exemplos do documento: população mundial, acesso à Internet, carros elétricos, preços, inflação.

Estratégia: desenhar/ler o gráfico → reconhecer a **forma** (reta, explosão, S, degraus decrescentes) → ajustar K , a , b com pontos → prever **dentro do horizonte** → explicitar a hipótese e as limitações.

Exercícios

1. Completar: o crescimento logarítmico cresce sempre mas com taxa _____. o logístico tem assíntota em _____ (capacidade de carga) e inflexão em _____. quem propôs o logístico (e ano)? _____

2. Comparar os quatro: completa — logarítmico: situação típica _____, a longo prazo _____ · logístico: situação típica _____, a longo prazo _____ · exponencial: a longo prazo _____ · linear: a longo prazo _____.

3. Logístico: com $f(x) = 100/(1 + 9 \cdot e^{-x})$ (x em anos), calcula $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ e o limite quando $x \rightarrow \infty$. Indica K , a taxa máxima e em que x se dá a inflexão (dica: resolve $1 + 9e^{-x} = 2$).

4. Identificar por tabela: uma plataforma tem inscritos (milhares): ano 0: 4 · ano 1: 16 · ano 2: 40 · ano 3: 70 · ano 4: 88 · ano 5: 95. (a) Calcula as diferenças: o que acontece (aumentam, depois diminuem)? (b) Que modelo se ajusta e porque não o exponencial? (c) Qual será o teto provável?

5. Logarítmico: $g(x) = 20 \cdot \ln(x + 1)$ (tempo de aprendizagem). Usa $\ln 2 = 0,69$, $\ln 3 = 1,10$, $\ln 4 = 1,39$ e calcula $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$. (a) As diferenças entre valores sucessivos fazem o quê? (b) O que prevê para x grande — «estagnar» ou «crescer devagar para sempre»? Justifica.

6. Escolher o modelo (e justificar pela natureza do processo): (a) cobertura de acesso à Internet num país · (b) preço fixo de um bilhete com aumento anual · (c) população de uma ilha com recursos limitados · (d) número de palavras conhecidas por uma criança (explosão inicial, depois aperfeiçoamento).

7. Mesma situação, três modelos (como o documento sugere): para prever carros elétricos em 10 anos, compara linear, exponencial e logístico — (a) o que cada um «aposta»? (b) Vantagem e risco de cada? (c) Que dado extra decidiria entre eles (ex.: quota de mercado, políticas)?

8. Leitura gráfica: num gráfico logístico, marca (a) o teto K , (b) o ponto de inflexão $K/2$ e (c) explica porque é que prever «no braço» acima de $K/2$ dá sempre valores menores do que o exponencial.

9. Limitações em ação: um modelo logístico prevê estagnação em 2030 — que eventos reais poderiam mudar K ou quebrar a curva (3 exemplos: tecnologia, política, crises)? O que se responde quando o modelo falha: mudar de modelo ou mudar a hipótese?

10. Erros: corrige (a) «logístico = exponencial com um teto colado por cima» · (b) «logarítmico estagna num valor» · (c) «a capacidade de carga K é um número fixo da natureza» · (d) «quanto mais complicado o modelo, melhor é».

11. Tecnologia: descreve como usarias o GeoGebra (ou folha de cálculo) para ajustar $f(x) = K/(1 + a \cdot e^{-bx})$ a uma série: pontos → curva → variar K , a , b → o que observar (linha passar pelos pontos?) → o que discutir (adequação ao objetivo) — ligação ao AT 14.

12. Síntese: «Os quatro modelos são quatro respostas à mesma pergunta: até onde?» Explica (4–5 linhas) como linear, exponencial, logarítmico e logístico respondem de forma diferente, porque é que o logístico é a correção do malthusiano, e o que significa seleccionar o modelo adequado (dados + processo + objetivo + limitações assumidas).

Soluções — Crescimento logarítmico e logístico

11.º Ano

MACS

Resolução completa

1. **decrecente** (diminui sempre) · $K \cdot K/2$ · Verhulst (1838).

2. logarítmico: situação típica **aprendizagem/resposta inicial rápida**, a longo prazo **cresce devagar para sempre** (sem teto) · logístico: **crescimento com recursos limitados** (população, adoção), a longo prazo **estagna em K** · exponencial: **dispara sem limite** (só serve no curto prazo) · linear: **avança a passo constante** (subestima sempre a prazo se o processo acelera).

3. $f(0) = 100/(1 + 9) = 10$ · $f(2) = 100/(1 + 9 \cdot 0,135) = 100/2,218 \approx 45,1$ · $f(4) = 100/(1 + 9 \cdot 0,0183) = 100/1,165 \approx 85,9$ · limite: **100 = K** ($e^{-x} \rightarrow 0$). $K = 100$; inflexão: $1 + 9e^{-x} = 2 \rightarrow 9e^{-x} = 1 \rightarrow x = \ln 9 \approx 2,2$ ($f = 50 = K/2$, máxima velocidade).

4. (a) Diferenças: 12, 24, 30, 18, 7 → **aumentam e depois diminuem** (aceleram até ano 2/3 e depois abrandam). (b) **Logístico**: há desaceleração e estabilização — o exponencial nunca abrandaria (razão constante), e aqui as razões caem ($2,5 \rightarrow 2,0 \rightarrow 1,75 \rightarrow 1,57 \rightarrow 1,47$). (c) Teto provável **≈ 100 mil** (os valores tendem para 100: 88, 95, ...) — a capacidade de carga da plataforma.

5. $g(1) = 20 \cdot \ln 2 = 20 \times 0,69 = 13,8$ · $g(2) = 20 \cdot \ln 3 = 20 \times 1,10 = 22,0$ · $g(3) = 20 \cdot \ln 4 = 20 \times 1,39 = 27,8$. (a) Diferenças: 13,8 → 8,2 → 5,8 → **diminuem** (desaceleração). (b) Para x grande **cresce devagar para sempre** — a função logarítmica **não tem assíntota** (vai tender para $+\infty$, mas com passos cada vez menores); estagnar seria o logístico.

6. (a) **Logístico** — adoção com teto (mercado saturado, infraestrutura). (b) **Linear** — acréscimo fixo por período (taxa absoluta constante). (c) **Logístico** — ilha com recursos: o crescimento encontra a capacidade de carga. (d) **Logarítmico** — explosão inicial (muitas palavras novas) e depois aperfeiçoamento lento (sem teto definido).

7. (a) Linear aposta em **tendência constante**; exponencial em **aceleração contínua**; logístico em **adoção com saturação** (quota máxima). (b) Linear: simples e robusto no curto / subestima a prazo · exponencial: captura a mania inicial / explode irrealisticamente · logístico: realista com limites / exige estimar K (incerteza). (c) Dado decisivo: **quota de mercado máxima** (K), horizonte de políticas (proibições, metas) e preço relativo — é isso que separa as curvas.

8. (a) Assíntota horizontal: a curva **toca quase K** sem passar (ler o valor de K no eixo). (b) Ponto onde a subida é mais rápida = **K/2** (metade do teto). (c) Acima de K/2 o logístico **abanda** (a concavidade vira para baixo) enquanto o exponencial **mantém a aceleração** → as previsões exponenciais ficam progressivamente **acima** das logísticas (a diferença «abre»); por isso prever exponencialmente num mercado maduro é garantir erro em cima.

9. Mudariam K ou a curva: **tecnologia** (nova fonte/eficiência sobre K), **política** (meta, incentivo ou proibição muda a taxa/para de vez), **crises** (guerra, pandemia, recessão: quebra o padrão), inovação de substituição (o produto morre antes de K). Quando falha: primeiro **rever a hipótese** (o processo mudou?) e só depois **mudar de modelo** — mudar de modelo sem mudar a hipótese é «vestir os dados».

10. (a) **Falso** — no logístico a desaceleração é **intrínseca** (inflexão em K/2); colar um teto a um exponencial daria um salto brusco e irreal. (b) **Falso** — logarítmico **não estagna**: só abrandaria (sem assíntota). (c) **Falso** — K depende do contexto (recursos, políticas, tecnologia) e muda (ex. 9). (d) **Falso** — o critério é a **adequação ao objetivo**: um linear para 1 ano pode ser melhor (e mais barato) que um logístico para 20 anos.

11. (1) Colocar os **pontos** da série (GeoGebra: lista de pontos; folha: gráfico de dispersão). (2) Definir $f(x) = K/(1 + a \cdot e^{-bx})$ com **sliders** para K, a, b e ir ajustando até a curva **passar perto dos pontos**. (3) Observar: ajuste nos extremos e no meio; discutir **adequação ao objetivo** (previsão curta vs longa), a incerteza em K e o que pode quebrar a tendência (limitações) — é exatamente a discussão do AT 14.

12. Cada modelo responde «até onde» de um modo: linear **não responde** (sempre o mesmo), exponencial **não pára**, logarítmico **nunca chega** (cada vez mais devagar), logístico **chega a um teto** (K). O logístico é a **correção do malthusiano**: em vez de prometer explosão eterna, reconhece a **capacidade de carga** e põe a maior mudança em K/2.

«Selecionar o modelo adequado» é cruzar **dados** (a forma na tabela/gráfico), **processo** (há teto? taxa fixa/percentual?), **objetivo** (prever curto ou longo?) e **limitações assumidas** (o que pode mudar) — um modelo é sempre uma hipótese declarada, não a realidade.

Nota: quatro blocos — **os 4 modelos** · logístico e K · logarítmico · **escolha e limitações**. Liga: ficha 4 (linear/exponencial, malthus) · AT 14 (ajuste a séries, GeoGebra/folha) · resumo 1 (visão global do tema).