

Ficha — Modelos matemáticos na partilha

10.º Ano

MACS

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: Aplicar o método de D'Hondt e outros métodos de partilha proporcional, distinguir a partilha em casos discretos e contínuos, reconhecer as limitações da partilha equilibrada com bens indivisíveis e identificar situações paradoxais — concluindo que o método se escolhe para cada situação.

Revisão rápida

Partilha = distribuição proporcional de um bem (mandatos, dinheiro, espaço) entre quem tem direito. Em eleições, distribui-se o número de **mandatos** de um círculo entre as listas.

Método de D'Hondt (divisores 1, 2, 3, ...) — 3 passos:

Passo	Como
1. Quocientes	dividir os votos de cada lista por 1, 2, 3, ... até dar o número de mandatos
2. Ordenação	juntar todos os quocientes e ordenar do maior para o menor
3. Atribuição	cada mandato corresponde ao quociente seguinte; vence a lista desse quociente

Outros métodos: *maior remanescente* (quota = total ÷ mandatos; arredonda-se por baixo e os mandatos em falta vão aos maiores restos) e o *Sainte-Laguë* (divisores 1, 3, 5, ...). **O método importa: a mesma votação pode dar mandatos diferentes.**

Partilha discreta vs contínua — discreta: bens **indivisíveis** (mandatos, computadores, heranças com bens que não se partem); contínua: bens **divisíveis** (dinheiro, água, queijo, espaço). Com bens indivisíveis, a «partilha equilibrada» falha — daí a pluralidade de métodos.

Métodos livres de inveja — cada um prefere a sua parte à de qualquer outro (mesmo que as partes não sejam iguais): ex.: *divide-a-escolhe* (um parte, o outro escolhe). O critério de igualdade é subjetivo — a valorização de um bem varia de pessoa para pessoa.

Referências: *paradoxo de Alabama* — com o método do maior remanescente, aumentar o número total de mandatos pode **tirar** um mandato a uma lista; *monotonicidade* — por isso os métodos de divisor (D'Hondt) são house-monótonos.

Estratégia: identificar o bem (discreto/contínuo) → escolher o método adequado → executar os passos → conferir a soma (mandatos atribuídos = totais) → testar o que muda com outro método ou com outro total.

Exercícios

1. Completar: a partilha é uma distribuição _____ de um bem; no método de D'Hondt os votos dividem-se por _____, _____, _____ ... e cada mandato vai para os maiores _____.

2. Eleição com 6 mandatos: lista A = 9000 votos, B = 6500, C = 2800. Calcula os quocientes de D'Hondt (A: 9000; 4500; 3000... — completa os restantes) e atribui os 6 mandatos.

3. 40 computadores a distribuir por 3 departamentos com 12, 8 e 5 alunos (25 no total) na proporção dos alunos. Calcula a quota ($40 \div 25$), as partes exatas, arredonda por baixo e atribui o mandato que sobra ao maior resto. (método do maior remanescente)

4. Outra eleição, 4 mandatos: $X = 3400$, $Y = 2600$, $Z = 1500$. Constrói a tabela de quocientes de D'Hondt e indica o resultado final.

5. Comparação de métodos — mesma votação, 5 mandatos: $A = 8$ votos, $B = 9$, $C = 14$ (total 31). (a) Por D'Hondt, que repartição resulta? (b) Por maior remanescente (quota = $31 \div 5 = 6,2$), que restos resultam e em que repartição? (c) Compara e retira a conclusão.

6. Paradoxo de Alabama — mesma votação: $A = 10$, $B = 17$, $C = 23$ (50 votos), método do maior remanescente. Com 7 mandatos a repartição é $A = 2$, $B = 2$, $C = 3$; com 8 mandatos, calcula a nova quota ($50 \div 8 = 6,25$), os restos e a nova repartição. O que acontece ao mandato de A? Explica o paradoxo.

7. Classificar cada partilha em discreta ou contínua: distribuir 12 bilhetes · dividir uma herança em dinheiro · repartir um terreno entre dois herdeiros · atribuir horas de trabalho · partilhar um queijo · eleger 6 deputados.

8. Explica porque é que a partilha equilibrada («cada um fica com o que julga igual») não resolve o caso de um bem indivisível (ex.: uma casa) e descreve um método livre de inveja aplicável (divide-a-escolhe), indicando porque é que ninguém fica a querer a parte do outro.

9. Verdadeiro ou falso. Corrige as falsas.

- a) No método de D'Hondt os votos se dividem sucessivamente por 1, 2, 3, 4 ... (V/F)
- b) Uma repartição por D'Hondt está correta se a soma dos mandatos for igual ao total. (V/F)
- c) O paradoxo de Alabama (perder mandatos ao aumentar o total) afeta o método do maior remanescente. (V/F)
- d) Num método livre de inveja, alguém pode preferir a parte do vizinho. (V/F)
- e) Métodos diferentes podem dar repartições diferentes para a mesma votação. (V/F)

10. Círculo com 5 mandatos: A = 6000, B = 5000, C = 3800. Calcula os quocientes (divisores 1–3 chegam), lista-os por ordem decrescente e atribui os mandatos.

11. Aplicação: uma junta vai repartir um orçamento entre 4 projetos com valorizações diferentes dos membros (partilha contínua e subjetiva). Que critérios próprias — partes iguais, proporcionais ou livres de inveja — e porquê? Que informação falta para decidir?

12. Síntese: por que razão as Aprendizagens Essenciais falam em «pluralidade de métodos e adequabilidade a cada situação»? Ilustra com dois contextos (um eleitoral e um quotidiano) e explica o que os paradoxos ensinam sobre a neutralidade da matemática aplicada à partilha.

Soluções — Modelos matemáticos na partilha

10.º Ano

MACS

Resolução completa

1. Distribuição **proporcional** · por **1, 2, 3 ...** · **quocientes** (das divisões).

2. Quocientes — A: 9000, 4500, 3000, 2250, 1800, 1500 · B: 6500, 3250, 2167, 1625, 1300, 1083 · C: 2800, 1400, 933, 700, 560, 467. Seis maiores: **9000 (A), 6500 (B), 4500 (A), 3250 (B), 3000 (A), 2800 (C)** → **A = 3, B = 2, C = 1** (soma 6 ✓). É proporcional aos votos: A 49 % → 3 mandatos, B 35 % → 2, C 15 % → 1.

3. Quota: $40 \div 25 = 1,6$ computadores por aluno. Partes exatas: $12 \times 1,6 = 19,2$ · $8 \times 1,6 = 12,8$ · $5 \times 1,6 = 8,0$. Arredondar por baixo: $19 + 12 + 8 = 39$ — falta 1. Restos: $0,2$ · $0,8$ · $0,0$ → o maior resto é do 2.º departamento → atribuição final: **19, 13 e 8** (soma 40 ✓).

4. Quocientes — X: 3400, 1700, 1133, 850 · Y: 2600, 1300, 867, 650 · Z: 1500, 750, 500, 375. Quatro maiores: **3400 (X), 2600 (Y), 1700 (X), 1500 (Z)** → **X = 2, Y = 1, Z = 1** ✓.

5. (a) D'Hondt — quocientes: C: 14, 7, 4,67, 3,5, 2,8 · B: 9, 4,5, 3, 2,25, 1,8 · A: 8, 4, 2,67, 2, 1,6. Cinco maiores: 14 (C), 9 (B), 8 (A), 7 (C), 4,67 (C) → **C = 3, B = 1, A = 1**. (b) Maior remanescente — quota 6,2; inteiros por baixo: A 1 (resto 1,8), B 1 (resto 2,8), C 2 (resto 1,6) → 4 mandatos; o 5.º vai ao **maior resto (B, 2,8)** → **A = 1, B = 2, C = 2**. (c) Mesma votação, repartições **diferentes**: D'Hondt favorece o maior (C leva 3), o maior remanescente corrige pelo resto. **Conclusão: o método é uma escolha com consequências — não há contagem neutra.**

6. Com 8 mandatos: quota = 6,25; inteiros por baixo: A = 1, B = 2, C = 3 (soma 6); restos: A **3,75**, B **4,50**, C **4,25** → os 2 mandatos em falta vão a B e C → **A = 1, B = 3, C = 4**. Comparando: com 7 mandatos, A tinha **2**; com 8, fica com **1** — **A perde um mandato quando o total aumenta**: é o *paradoxo de Alabama*, do método do maior remanescente (os métodos de divisor, como D'Hondt, não sofrem este paradoxo).

7. Bilhetes — **discreta** · dinheiro — **contínua** · terreno entre herdeiros — **discreta** (se não se parte sem perder valor: um fica com o terreno, o outro compensa com dinheiro) · horas — **contínua** (admite frações: meias horas, quartos) · queijo — **contínua** · deputados — **discreta**.

8. Uma casa **não se parte**: a partilha equilibrada exige que cada um avalie igualmente as partes, mas com um bem único só há «uma parte» — dividir destrói o bem. No **divide-a-escolhe**: A parte em duas que considera iguais; B **escolhe** primeiro e A fica com a outra. Como B escolhe o que prefere e A garante que as duas valem o mesmo *para si, ninguém fica a querer a parte do outro* — método livre de inveja (mesmo que as partes não pareçam iguais de fora).

9. a) **V** — regra dos divisores. b) **V** — a conferência da soma é sempre obrigatória. c) **V** — é dele que se trata (e não do D'Hondt). d) **F** — livre de inveja significa o contrário: **ninguém** prefere a parte do outro. e) **V** — ver ex. 5.

10. Quocientes: A — 6000, 3000, 2000, 1500, 1200 · B — 5000, 2500, 1667, 1250, 1000 · C — 3800, 1900, 1267, 950, 760. Por ordem: **6000 (A), 5000 (B), 3800 (C), 3000 (A), 2500 (B)** → **A = 2, B = 2, C = 1** (soma 5 ✓).

11. Resposta possível: se os projetos têm valor **objetivo** diferente, repartição **proporcional** (critérios: número de beneficiários, custo); se o que importa é a satisfação de cada membro, **livre de inveja** (cada um acaba sem invejar a parte do outro). Falta: a **valorização de cada membro** (subjettiva — quero mais o A ou o B?), o **piso mínimo** de cada projeto e as **regras de desempate**. Justificação: sem informação sobre preferências, qualquer critério é arbitrário — é isso que a ficha quer que se reconheça.

12. Resposta possível: porque nenhum método satisfaz todas as propriedades desejáveis (os paradoxos são a prova); por isso o método se escolhe **para a situação**. Contextos: eleitoral (D'Hondt em Assembleia da República para representatividade; maioria simples no delegado para decisão rápida) e quotidiano (dinheiro → proporcional; espaço/tarefas → livre de inveja). Os paradoxos mostram que a matemática **não decide sozinha**: os critérios são negociados coletivamente — a contagem nunca é politicamente neutra.

Nota: quatro check-ups obrigatórios em qualquer partilha — **discreto ou contínuo?** · **qual método?** · **a soma fecha?** · **e se o total mudar?** (é aqui que os paradoxos aparecem).