

# Ficha — Modelos matemáticos nas eleições

10.º Ano    MACS    4 páginas    12 exercícios

**Objetivo:** Identificar o vencedor de processos eleitorais por maioria simples e maioria absoluta, aplicar o método de Borda a boletins de preferência e comparar sistemas de votação — reconhecendo que métodos diferentes podem eleger vencedores diferentes para a mesma votação.

## Revisão rápida

Dois critérios de maioria — o que muda é a referência:

| Critério         | Regra                                                              | Exemplo típico                                  |
|------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Maioria simples  | mais votos do que <b>qualquer outro candidato</b> (não exige 50 %) | delegado de turma, órgãos sociais               |
| Maioria absoluta | <b>mais de metade</b> dos votos expressos (> 50 %)                 | 1.ª volta da eleição do Presidente da República |

Referência: os votos **expressos** são os votos válidos — a contagem faz-se sobre eles, não sobre os eleitores inscritos. Se ninguém atingir a maioria absoluta na 1.ª volta, há **2.ª volta** entre os dois primeiros (vence quem tiver mais votos).

**Método de Borda** (boletins de **preferência ordenada**): cada eleitor ordena os candidatos; com  $n$  candidatos, o 1.º preferido recebe  $n - 1$  pontos, o seguinte  $n - 2$ , ..., o último 0 pontos. Vence quem somar **mais pontos**.

**Sistemas de votação** — majoritário (1 ou 2 voltas) · por preferência ordenada (Borda) · de aprovação (vota-se em vários candidatos) · plurinominal proporcional (conta de mandatos → ficha da partilha). **Regra-chave:** métodos diferentes podem gerar escolhas diferentes para a mesma votação.

**Referências:** o *paradoxo de Condorcet* (maiorias que formam ciclos:  $X > Y, Y > Z, Z > X$ ) e o *teorema de Arrow* (nenhum sistema eleitoral satisfaz todas as propriedades desejáveis) mostram que **todo o método tem limitações** — é isso que o debate democrático negocia.

**Estratégia:** identificar o sistema → aplicar a regra de contagem (maios? pontos?) → calcular limiares e percentagens → comparar sempre os resultados dos métodos na mesma votação.

## Exercícios

1. Completar: a maioria simples exige \_\_\_\_\_ votos do que qualquer outro candidato; a maioria absoluta exige mais de metade dos votos \_\_\_\_\_. A eleição de delegado de turma usa a \_\_\_\_\_; a 1.ª volta da eleição presidencial exige a \_\_\_\_\_, sob pena de haver \_\_\_\_\_.

2. Três candidatos a delegado com 36 votos expressos: A = 15, B = 12, C = 9. Quem vence por maioria simples? Quantos votos seriam necessários para maioria absoluta? A teria sido atingida?

3. Eleição presidencial simulada com 1 200 000 votos expressos: X = 550 000, Y = 430 000, Z = 220 000. Calcula a percentagem de X e decide se ele é eleito na 1.ª volta. Se não, quem vai à 2.ª volta e quantos votos mínimos X precisa lá?

4. Completar a regra de Borda: com  $n$  candidatos, o 1.º preferido recebe \_\_\_\_\_ pontos e o último \_\_\_\_\_ pontos. A soma de todos os pontos possíveis de um só eleitor é  $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \dots$ . Com 4 candidatos, que pontos recebe o 3.º preferido?

5. Eleição com 4 candidatos (A, B, C, D) e 12 eleitores, por ordem de preferência: 6 votos  $A > B > C > D$  · 4 votos  $B > C > D > A$  · 2 votos  $C > D > A > B$ . Calcula a pontuação de cada candidato pelo método de Borda e identifica o vencedor.

6. Na mesma votação do exercício 5, quem venceria por maioria simples (contagem dos 1.ºs lugares)? Compara com o vencedor de Borda e retira a conclusão sobre a influência do método.

7. Verifica a conservação dos pontos do exercício 5: a soma das pontuações tem de ser igual a  $n^\circ$  de eleitores  $\times (1 + 2 + 3 + 4)$ . Calcula e confirma. Se a tua soma divergir, o que isso indica?

8. Liga cada sistema à sua descrição: «vota-se uma só vez e vence quem tiver mais votos» (\_\_\_) · «cada eleitor ordena os candidatos e recebe pontos  $n-1 \dots 0$ » (\_\_\_) · «se ninguém tem maioria absoluta, repetem-se as contagens com os dois primeiros» (\_\_\_) · «vota-se em todos os candidatos aceitáveis e vence o mais votado» (\_\_\_). Opções: majoritário de 1 volta · Borda · majoritário de 2 voltas · de aprovação.

9. Verdadeiro ou falso. Corrige as falsas.

- a) Na maioria simples basta ter mais votos que cada adversário, mesmo sem chegar a 50 %. (V/F)
- b) O método de Borda atribui pontos pela ordem de preferência de cada eleitor. (V/F)
- c) Na 2.ª volta da eleição presidencial concorrem os três primeiros da 1.ª volta. (V/F)
- d) Dois sistemas eleitorais diferentes podem eleger vencedores diferentes na mesma votação. (V/F)
- e) O teorema de Arrow garante que existe um sistema eleitoral perfeito. (V/F)

10. Cálculo do limiar: (a) quantos votos expressos mínimos são precisos para maioria absoluta com 75 votos? (b) Com 100 eleitores inscritos, dos quais só 75 votaram, o limiar muda? Justifica com a base de contagem certa.

11. Aplicação: a associação de estudantes vai eleger um presidente entre 3 candidatos. Propõe um método (maioria simples, 2 voltas ou Borda), descreve o procedimento de contagem em 3 passos e justifica a escolha tendo em conta a representatividade do vencedor.

12. Síntese: porque é que se diz que «nenhum sistema eleitoral é perfeito»? Explica com uma ideia do paradoxo de Condorcet ou do teorema de Arrow e com o que isso implica para a participação cívica (segundo as Aprendizagens Essenciais).

## Soluções — Modelos matemáticos nas eleições

10.º Ano

MACS

Resolução completa

1. Mais votos do que **qualquer outro** candidato · votos **expressos** · maioria **simples** · maioria **absoluta** · uma **2.ª** volta.

2. Vence **A** por maioria simples ( $15 > 12 > 9$  — mais votos que cada adversário). Maioria absoluta:  $36 \div 2 = 18 \rightarrow$  é preciso **mais de 18**, ou seja, **19 votos**. A tem  $15 < 19$  — **não** atingiu a maioria absoluta.

3.  $550\,000 \div 1\,200\,000 \times 100 \approx 45,8\%$  — menos de 50 %, logo **X não é eleito na 1.ª volta**; há 2.ª volta com **X e Y** (os dois primeiros). Na 2.ª volta vence quem tiver mais votos: X precisa da maioria simples — matematicamente qualquer valor acima de Y, mas o limiar de segurança é **600 001** (mais de metade dos 1 200 000) se quiser garantir a maioria absoluta.

4.  $n - 1$  pontos · 0 pontos · a soma é  $n(n - 1)/2$ . Com 4 candidatos o 3.º preferido recebe **2 pontos**.

5. Pontuação ( $n = 4 \rightarrow 1.º = 3, 2.º = 2, 3.º = 1, 4.º = 0$ ):

$$A = 6 \times 3 + 4 \times 0 + 2 \times 1 = 18 + 0 + 2 = 20 \quad B = 6 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 0 = 12 + 12 + 0 = 24$$

$$C = 6 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3 = 6 + 8 + 6 = 20 \quad D = 6 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 2 = 0 + 4 + 4 = 8$$

Vence **B (24 pontos)** — é o candidato de consenso: não lidera em 1.ºs lugares mas é bem colocado em todas as preferências.

6. Por maioria simples (1.ºs lugares): **A** (6 votos, contra 4 de B e 2 de C). Mas Borda elege **B**. Conclusão: **métodos diferentes geram escolhas diferentes para a mesma votação** — a maioria simples valoriza o 1.º lugar; Borda valoriza o consenso. Nenhum dos dois é «o correto»: é o sistema que se escolhe que decide.

7. Verificação: a soma dos pontos atribuíveis a um eleitor é  $3 + 2 + 1 + 0 = 6$  (o mesmo que  $1 + 2 + 3 = n(n-1)/2$ , com  $n = 4$ ). Total esperado:  $12 \times 6 = 72$ . Soma das pontuações obtidas:  $20 + 24 + 20 + 8 = 72 \checkmark$  — a conservação confirma que nenhum ponto se perdeu. Se a soma divergir, há um erro de contagem numa das pontuações.

8. «Uma só vez, mais votos» — **majoritário de 1 volta** · «ordenação com pontos  $n-1 \dots 0$ » — **Borda** · «maioria absoluta ou repete com os dois primeiros» — **majoritário de 2 voltas** · «vota-se em todos os aceitáveis» — **de aprovação**.

9. a) **V** — é a definição. b) **V** — boletim de preferência ordenada. c) **F** — só os **dois** primeiros. d) **V** — é a lição central do tema. e) **F** — Arrow mostra o contrário: **nenhum** sistema satisfaz todas as propriedades desejáveis.

10. (a)  $75 \div 2 = 37,5 \rightarrow$  é preciso **mais de 37,5  $\rightarrow$  38 votos**. (b) **Não muda**: a base é a dos **votos expressos** (75), não a dos inscritos (100) — com 100 inscritos mas 75 votos, o limiar continua 38. É por isso que a abstenção não altera a maioria absoluta, apenas a legitimidade democrática.

11. Resposta possível (2 votos por coerência do procedimento + 1 pela justificação): **2 voltas** — (1) 1.ª volta: contar votos expressos; (2) se alguém tem  $> 50\%$ , eleito; senão, (3) 2.ª volta entre os dois primeiros, vence quem tiver mais votos. Justificação: garante que o vencedor tem apoio maioritário expresso na decisão final — ao contrário da maioria simples, que pode eleger alguém que a maioria rejeita (o «menos rejeitado»), e sem a complexidade de pontuar preferências em eleições com poucos candidatos.

12. Resposta possível: qualquer sistema satisfaz algumas propriedades desejáveis (ex.: o vencedor deveria vencer a cada adversário em confronto direto) mas não todas ao mesmo tempo — no paradoxo de Condorcet, as preferências dos eleitores podem formar **ciclos** ( $X > Y > Z > X$ ) em que não há vencedor por confronto direto, e Arrow prova que **não existe** um método imune a estas contradições. Implicação cívica: como nenhum método é perfeito, a escolha do sistema é uma **decisão coletiva legítima** — e a participação de cada cidadão (no voto e no debate sobre as regras) é o que dá validade ao resultado.

**Nota:** todo o tema resume-se a três caixas — **maios** (simples vs absoluta: a referência é sempre «dos votos expressos») · **pontos** (Borda:  $n-1 \dots 0$ , soma verificável) · **sistemas** (a mesma votação pode ter vários vencedores). A matemática é simples; a escolha do método é política.