

Função Quadrática e Proporcionalidade Inversa

9.º ano Matemática 5 páginas

 **Revisão rápida:** Nesta ficha vais trabalhar dois tipos de funções.

Função quadrática $\rightarrow y = ax^2$, com $a \neq 0$. O gráfico é uma **parábola** com vértice na origem $(0, 0)$. Se $a > 0$, a concavidade está voltada para **cima**; se $a < 0$, para **baixo**.

Proporcionalidade inversa $\rightarrow y = k/x$, com $k \neq 0$ e $x \neq 0$. O gráfico é uma **hipérbole**. Se $k > 0$, os ramos estão nos quadrantes 1 e 3; se $k < 0$, nos quadrantes 2 e 4.

1. Identifica o tipo de função

Para cada expressão, indica se representa uma **função quadrática** ($y = ax^2$), uma **proporcionalidade inversa** ($y = k/x$), ou **nenhuma** das anteriores.

Expressão	Tipo de função
a) $y = 2x^2$	_____
b) $y = 5/x$	_____
c) $y = 3x + 1$	_____
d) $y = -x^2$	_____
e) $y = 4/x^2$	_____
f) $y = -3/x$	_____
g) $y = x^2/2$	_____
h) $y = 7/(x + 1)$	_____

2. Função quadrática $y = ax^2$

a) $y = 2x^2$

Completa a tabela e determina a concavidade e o vértice.

x	-2	-1	0	1	2
y	----	----	----	----	----

Concavidade: _____ Vértice: (____, ____)

b) $y = -3x^2$

Completa a tabela e determina a concavidade e o vértice.

x	-2	-1	0	1	2
y	----	----	----	----	----

Concavidade: _____ Vértice: (____, ____)

c) $y = \frac{1}{2} x^2$

Completa a tabela e determina a concavidade e o vértice.

x	-4	-2	0	2	4
y	---	---	---	---	---

Concavidade: _____ Vértice: (____, ____)

3. Proporcionalidade inversa $y = k/x$

Para cada função, determina a constante de proporcionalidade k e completa a tabela. Lembra-te que $x \neq 0$.

a) $y = 6/x$ ($k = \underline{\hspace{2cm}}$)

x	1	2	3	6
y	_____	_____	_____	_____

Quando x duplica, o que acontece a y ? _____

b) Sabe-se que y é inversamente proporcional a x e que $y = 4$ quando $x = 3$.

Determina a constante k : _____ Expressão: $y = \underline{\hspace{2cm}}$

Completa a tabela de variação:

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____

c) $y = -8/x$ ($k = \underline{\hspace{2cm}}$)

Em que quadrantes se encontram os ramos da hipérbole? _____

Completa: quando $x = 2$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$; quando $x = -4$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Associa cada gráfico à sua equação

Lê as descrições dos gráficos e associa-as à expressão correta.

GRÁFICO A

Parábola com concavidade voltada para cima e vértice na origem.

Equação: _____

GRÁFICO B

Hipérbole com ramos nos quadrantes 1 e 3.

Equação: _____

GRÁFICO C

Parábola com concavidade voltada para baixo e vértice na origem.

Equação: _____

GRÁFICO D

Hipérbole com ramos nos quadrantes 2 e 4.

Equação: _____

Equações disponíveis: $y = 3x^2$ $y = -2x^2$ $y = 4/x$ $y = -5/x$

5. Problemas

a) Lançamento de um projétil

Um projétil é lançado verticalmente para cima. A altura h (em metros) ao fim de t segundos é dada por:

$$h(t) = -5t^2 + 20t$$

i) Que tipo de função representa $h(t)$?

R: _____

ii) Qual é a altura do projétil ao fim de 1 segundo?

R: _____ m

iii) Ao fim de quantos segundos o projétil atinge o solo ($h = 0$)?

Resolução: _____

R: _____ s

b) Velocidade e tempo numa viagem

Um carro percorre 120 km a velocidade constante. A função que relaciona o tempo t (em horas) com a velocidade v (em km/h) é:

$$t(v) = \frac{120}{v}$$

i) Que tipo de relação existe entre t e v ?

R: _____

ii) Completa a tabela:

v (km/h)	30	40	60	80	120
t (h)	_____	_____	_____	_____	_____

iii) Se a velocidade duplicar, o que acontece ao tempo de viagem?

R: _____

c) Densidade de uma substância

A massa volúmica (densidade) de uma substância é dada por $d = m/V$, em que m é a massa (em gramas) e V é o volume (em cm^3).

Considera uma substância com $m = 100$ g.

i) Escreve a expressão que relaciona a densidade d com o volume V .

R: $d(V) =$ _____

ii) Calcula a densidade quando $V = 20$ cm^3 .

R: _____ g/cm^3

iii) Se o volume duplicar, o que acontece à densidade? Justifica.

R: _____

Soluções — Função Quadrática e Proporcionalidade Inversa

1. Identificação do tipo de função

Expressão	Tipo	Justificação
$y = 2x^2$	Quadrática	Forma $y = ax^2$ com $a = 2$
$y = 5/x$	Proporc. inversa	Forma $y = k/x$ com $k = 5$
$y = 3x + 1$	Nenhuma	Função afim ($y = mx + b$), não é quadrática nem inversa
$y = -x^2$	Quadrática	Forma $y = ax^2$ com $a = -1$
$y = 4/x^2$	Nenhuma	O expoente de x é 2 no denominador — não é da forma k/x
$y = -3/x$	Proporc. inversa	Forma $y = k/x$ com $k = -3$
$y = x^2/2$	Quadrática	Equivalente a $y = \frac{1}{2}x^2$ — forma $y = ax^2$
$y = 7/(x + 1)$	Nenhuma	Numa proporcionalidade inversa o denominador é apenas x

2. Função quadrática $y = ax^2$

a) $y = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Concavidade para cima ($a = 2 > 0$) | Vértice: (0, 0)

b) $y = -3x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-12	-3	0	-3	-12

Concavidade para baixo ($a = -3 < 0$) | Vértice: (0, 0)

c) $y = \frac{1}{2}x^2$

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

Concavidade para cima ($a = \frac{1}{2} > 0$) | Vértice: (0, 0)

3. Proporcionalidade inversa $y = k/x$

a) $y = 6/x$ ($k = 6$)

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Quando x duplica, y **reduz-se a metade** (relação inversa).

b) $y = 4$ quando $x = 3$

$k = x \times y = 3 \times 4 = 12 \rightarrow$ Expressão: $y = 12/x$

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-2	-4	-6	-12	12	6	4	2

c) $y = -8/x$ ($k = -8$)

Como $k = -8 < 0$, a hipérbole tem ramos nos **quadrantes 2 e 4**.

$x = 2 \rightarrow y = -8/2 = -4 \mid x = -4 \rightarrow y = -8/(-4) = 2$

4. Associação de gráficos a equações

Gráfico A — Parábola com concavidade para cima

$$y = 3x^2 \ (a = 3 > 0 \rightarrow \text{concavidade para cima; vértice na origem})$$

Gráfico B — Hipérbole nos quadrantes 1 e 3

$$y = 4/x \ (k = 4 > 0 \rightarrow \text{ramos nos quadrantes 1 e 3})$$

Gráfico C — Parábola com concavidade para baixo

$$y = -2x^2 \ (a = -2 < 0 \rightarrow \text{concavidade para baixo; vértice na origem})$$

Gráfico D — Hipérbole nos quadrantes 2 e 4

$$y = -5/x \ (k = -5 < 0 \rightarrow \text{ramos nos quadrantes 2 e 4})$$

5. Problemas

a) Lançamento de um projétil — $h(t) = -5t^2 + 20t$

i) Tipo de função

$h(t) = -5t^2 + 20t$ é uma **função quadrática** ($a = -5$). O termo independente e o termo de grau 1 são zero na forma pura, mas a presença de t^2 com $a \neq 0$ classifica-a como quadrática.

ii) Altura ao fim de 1 segundo

$$h(1) = -5(1)^2 + 20(1) = -5 + 20 = 15 \text{ m}$$

iii) Tempo até atingir o solo ($h = 0$)

$$-5t^2 + 20t = 0 \rightarrow -5t(t - 4) = 0$$

$$t = 0 \text{ (instante de lançamento)} \quad \text{ou} \quad t = 4 \text{ s}$$

b) Velocidade e tempo — $t(v) = 120/v$

i) Tipo de relação

Proporcionalidade inversa ($k = 120$). O tempo e a velocidade variam em sentido inverso.

ii) Tabela

$v \text{ (km/h)}$	30	40	60	80	120
$t \text{ (h)}$	4	3	2	1,5	1

$$\text{Cálculo: } t = 120 \div v$$

iii) Quando a velocidade duplica

O tempo **reduz-se a metade**. Exemplo: a 60 km/h demora 2 h; a 120 km/h demora 1 h (metade).

c) Densidade — $d = m/V$ com $m = 100$ g

i) Expressão

$$d(V) = 100/V \text{ (proporcionalidade inversa com } k = 100)$$

ii) Densidade para $V = 20$ cm³

$$d = 100/20 = 5 \text{ g/cm}^3$$

iii) Se o volume duplicar

A densidade **reduz-se a metade**, porque a densidade e o volume são inversamente proporcionais (produto constante $d \times V = 100$).