REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Muitos negócios empresariais dependem de concessões de patentes relativas a invenções.

Na tabela seguinte, apresenta-se o número de pedidos de patentes de invenção, por ano, desde o ano de 2000 até ao ano de 2015, em Portugal, de acordo com dados da *Pordata*.

Nesta tabela, $x = 0$ corresponde a 2000, $x = 1$ corresponde a 2001, e assim sucessivamente.

Anos após o final de 2000 (x)	**Número de pedidos de patentes de invenção** (y)
0	240
1	267
2	259
3	239
4	235
5	268
6	319
7	368
8	514
9	723
10	654
11	772
12	803
13	867
14	967
15	1178

Considere válido um modelo de regressão exponencial obtido a partir dos dados da tabela, e admita que esse modelo se manteria válido até 2019.

Estime, com base nesse modelo, o número de pedidos de patentes de invenção em 2019.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros do modelo de regressão exponencial $(a$ e $b)$ arredondados com cinco casas decimais;

– o valor pedido arredondado às unidades.

2. De acordo com o Barómetro da Organização Mundial do Turismo, consultado regularmente pelas empresas do ramo, o turismo mundial anual cresceu $3,9\%$ de 2016 para 2017, tendo sido atingido, no ano de 2017, o valor de $1,2$ mil milhões de turistas em todo o mundo.

Admita que, do final de 2017 em diante, durante uma década, o número anual de turistas em todo o mundo continuaria a crescer à taxa de $3,9\%$ ao ano.

Assim, o número anual mundial de turistas, T, em milhares de milhão, em função do tempo, n, em anos, decorrido desde o final de 2017, seria dado por

$$T(n) = 1,2 \times 1,039^n \ \text{, com } n \in \{1, 2, ..., 10\}$$

* **2.1.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número anual de turistas em todo o mundo em 2019.

Apresente o resultado em milhares de milhão, arredondado às décimas.

2.2. Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número total de turistas em todo o mundo de 2018 a 2026.

Apresente o resultado em milhares de milhão, arredondado às unidades.

3. Uma empresa, que realiza estudos na área da nutrição, publicou um estudo sobre o valor nutricional de onze queijos.

Na Figura 1, que não está à escala, apresentam-se:

- o diagrama de dispersão que relaciona a quantidade de gorduras, x, em gramas, e o valor energético, y, em quilocalorias, por cada 100 g de cada um dos queijos analisados;
- a reta de regressão linear de y sobre x.

Sabe-se que existe uma correlação linear forte entre as variáveis x e y.

Justifique que o valor do coeficiente de correlação linear de y sobre x não pode ser $-0,953$ nem pode ser $0,263$.

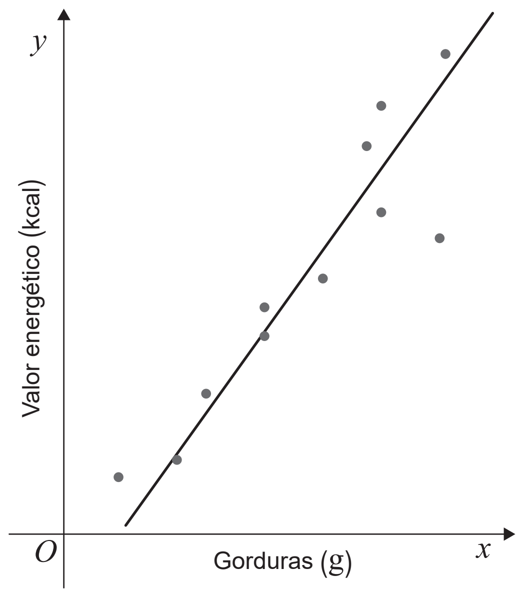

Figura 1

4. Uma empresa dedica-se à produção e comercialização de tinta.

4.1. A empresa planeia produzir dois tipos de tinta inovadora: tinta A e tinta B.

Cada litro de tinta A exige o uso de 1 grama de pigmento-base, requer 2 horas de trabalho de uma máquina e tem um custo de produção de 11 euros.

Cada litro de tinta B exige o uso de 2 gramas de pigmento-base, requer 1 hora de trabalho da mesma máquina e tem um custo de produção de 31 euros.

Para a produção destes tipos de tinta, a empresa tem de utilizar, pelo menos, 20 gramas de pigmento-base e pode dispor de até 22 horas de trabalho da máquina.

4.1.1. É possível a empresa produzir 10 litros de tinta A?

Justifique a sua resposta.

* **4.1.2.** Determine a quantidade de tinta A e a quantidade de tinta B, em litros, que a empresa deve produzir para que seja mínimo o custo de produção.

Na sua resposta, designe por x a quantidade de tinta A, em litros, e designe por y a quantidade de tinta B, em litros, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema, arredondados às décimas.

* **4.2.** A tinta produzida é comercializada em latas vendidas em caixas de dez unidades.

Um cliente encomendou três caixas de latas de tinta. Devido a um acidente, a entrega teve um atraso significativo, o que levou o cliente a suspeitar da existência de latas com tinta deteriorada. Tal suspeita só poderia ser confirmada abrindo latas.

Fez-se o seguinte acordo:

- o cliente abriria, ao acaso, uma lata de cada uma das três caixas;
- se, nas três latas abertas, pelo menos duas contivessem tinta deteriorada, a encomenda seria devolvida; caso contrário, a encomenda seria aceite pelo cliente.

Admita que, em cada uma daquelas três caixas, com dez latas cada, existe apenas uma lata com tinta deteriorada.

Determine a probabilidade de a encomenda ser devolvida pelo cliente.

Apresente o resultado na forma de dízima.

5. Uma empresa dedica-se ao fabrico de embalagens e pretende produzir copos de cortiça cilíndricos. A Figura 2 é um modelo de um desses copos.

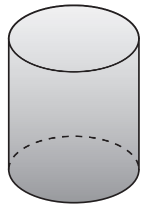

Figura 2

Os copos têm $330\ \mathrm{cm}^3$ de volume.

*** 5.1.** Sejam r e h, respetivamente, o raio da base e a altura dos copos, em centímetros, e seja A a área total da superfície exterior dos copos, incluindo a base, em cm^2

Mostre que A pode ser dada, em função de r, com $r > 0$, por

$$A(r) = \frac{\pi r^3 + 660}{r}$$

Na sua resposta, considere desprezável a espessura dos copos.

Comece por mostrar que $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

5.2. Um dos técnicos da empresa afirmou:

«Um copo cujas dimensões minimizem a quantidade de cortiça utilizada na sua produção tem o diâmetro da base superior à altura.»

Justifique que a afirmação do técnico é verdadeira.

Na sua resposta, apresente as dimensões do copo, diâmetro da base e altura, para as quais é mínima a área total da superfície exterior, incluindo a base, de acordo com os requisitos enunciados.

Resolva o problema com recurso às capacidades gráficas da calculadora.

Note que a área total da superfície exterior dos copos, de raio r, é dada por $A(r) = \dfrac{\pi r^3 + 660}{r}$.

Apresente os valores do diâmetro da base e da altura, em centímetros, arredondados às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às centésimas.

5.3. Considere, agora, um copo com base de raio 1 .

Na Figura 3, está representada, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, a circunferência de centro O e raio 1 que delimita a base desse copo. Está também representada a reta, s, que contém os pontos de intersecção dessa circunferência com o semieixo positivo das abcissas e com o semieixo positivo das ordenadas.

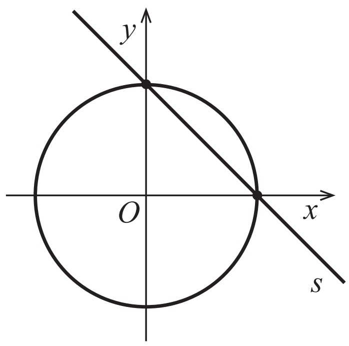

Figura 3

Determine a equação reduzida da reta s .

6. A fotografia da Figura 4 é de um toldo instalado no edifício de uma empresa, cujo movimento é controlado pela rotação de uma manivela.

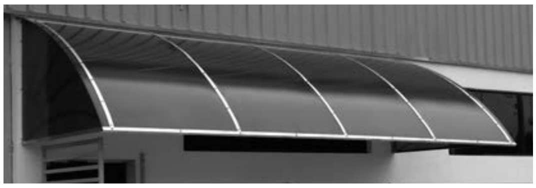

Figura 4

Na Figura 5, que não está à escala, está representado um corte lateral do toldo e da manivela, de uma barra fixa na parede e de uma barra lateral de suporte. Nesta figura:

- o setor circular DBP representa o toldo;
- $[AD]$ representa a parede;
- a reta AS representa o solo, que é perpendicular à parede;
- a linha poligonal $KOMN$ representa a manivela;
- $[AB]$ representa a barra fixa, de comprimento a, em metros;
- $[BP]$ representa a barra lateral de suporte do toldo, de comprimento b, em metros;
- $[BC]$ representa a posição de maior abertura do toldo, paralela ao solo;
- o ponto Q representa a projeção vertical do ponto P no solo.

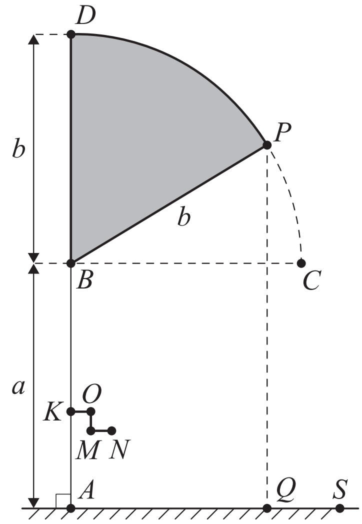

Figura 5

Na Figura 6, está representada, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, uma posição do braço da manivela, representado por $[OM]$, no seu movimento de rotação.

Nesta figura, θ representa a amplitude, em graus, do ângulo orientado no sentido positivo determinado pelo semieixo positivo Ox e por $\dot{O}M$.

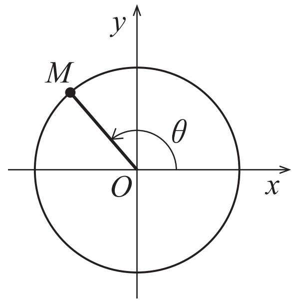

Figura 6

Quando $\theta = 0^{\circ}$, o ponto P, representado na Figura 5, coincide com o ponto C, correspondendo à abertura total do toldo; quando $\theta = 360^{\circ}$, o ponto P coincide com o ponto D, correspondendo à recolha total do toldo.

A distância, d, em metros, do ponto P ao solo, $\overline{PQ}$, é dada por

$$d(\theta) = 3 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{4}\right), \text{ com } 0^{\circ} \leq \theta \leq 360^{\circ}$$

O argumento da função seno está em graus.

* **6.1.** Determine o valor de θ, em graus, para o qual a distância do ponto P ao solo é 4 metros.

6.2. Determine o comprimento, a, da barra fixa e o comprimento, b, da barra lateral de suporte do toldo.

Apresente os resultados em metros.

Na sua resposta, poderá ser-lhe útil notar que o ponto P, quando $\theta = 0^{\circ}$, coincide com o ponto C e, quando $\theta = 360^{\circ}$, coincide com o ponto D.

7. Admita que o número, N, de computadores de uma empresa infetados por um vírus, t horas após o instante em que este foi detetado, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = \frac{5000}{1 + k \times 2^{-0,53t}} \quad , \text{ com } t \geq 0 \; ,$$

em que k é um número real positivo.

7.1. Sabe-se que, no instante em que o vírus foi detetado, havia 50 computadores da empresa infetados por esse vírus.

Determine o valor de k .

* 7.2. A empresa tem $20\,000$ computadores.

Considere que o número aproximado de computadores da empresa **não** infetados pelo vírus, t horas após o instante em que este foi detetado, é dado por $S(t)$.

O gráfico da função S tem uma assíntota horizontal.

Escreva uma equação dessa assíntota.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**4.1.2.**	**4.2.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	20	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.2.**	**3.**	**4.1.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.2.**	**7.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**