EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**
2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que implicam a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (páginas 12 e 13).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação escrita em língua portuguesa.

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, riscando a(s) que pretende anular.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Realizou-se uma Assembleia-geral de uma associação cultural, com o objectivo de eleger uma pessoa para representar a associação em sessões oficiais. Apresentaram-se três candidatos, o Rui, o Luís e o João. A Mesa da Assembleia propôs que cada associado votasse nos três candidatos, por ordem de preferência. O método escolhido para apurar o vencedor foi o preferencial, de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- por cada voto em primeira preferência, o candidato votado recebe três pontos, em segunda preferência, dois pontos e, em terceira preferência, um ponto;
- feito o apuramento da pontuação obtida por cada candidato, será vencedor o que obtiver uma pontuação total mais elevada.

A contagem dos votos vem descrita na tabela seguinte.

PREFERÊNCIAS	**VOTOS**		
1.ª	Rui	João	Luís
2.ª	Luís	Luís	Rui
3.ª	João	Rui	João
TOTAL	40	45	38

1.1. Copie para a sua folha de prova a tabela abaixo apresentada e, depois, complete-a utilizando o método preferencial.

Qual foi o candidato vencedor, segundo este método?

MÉTODO PREFERENCIAL

Contagem dos pontos		**Pontuação total**
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	
Rui		
Luís		

1.2. Se fosse adoptado o sistema maioritário, só a primeira preferência seria tida em conta, ganhando o candidato cujas primeiras preferências tivessem uma maioria relativa. Utilizando este método, o candidato vencedor seria o João.

No entanto, este candidato perderia quando comparado com os outros candidatos, dois a dois. Uma forma de comparar os candidatos dois a dois é utilizar o método maioritário, sem contar com os votos no terceiro candidato. Por exemplo, não contando com os votos no Luís, as votações no João e no Rui passam a ser as seguintes:

COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO JOÃO COM A VOTAÇÃO NO RUI

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1.ª	Rui	João	Rui
2.ª	João	Rui	João
TOTAL	40	45	38

Utilizando o método maioritário relativamente à primeira preferência, o Rui seria o candidato vencedor, uma vez que tinha 78 votos, enquanto o João teria apenas 45 .

1.2.1. Construa duas tabelas semelhantes à anterior, não contando, primeiro, com a votação no João e, depois, com a votação no Rui. Em cada uma das comparações, quem é o vencedor?

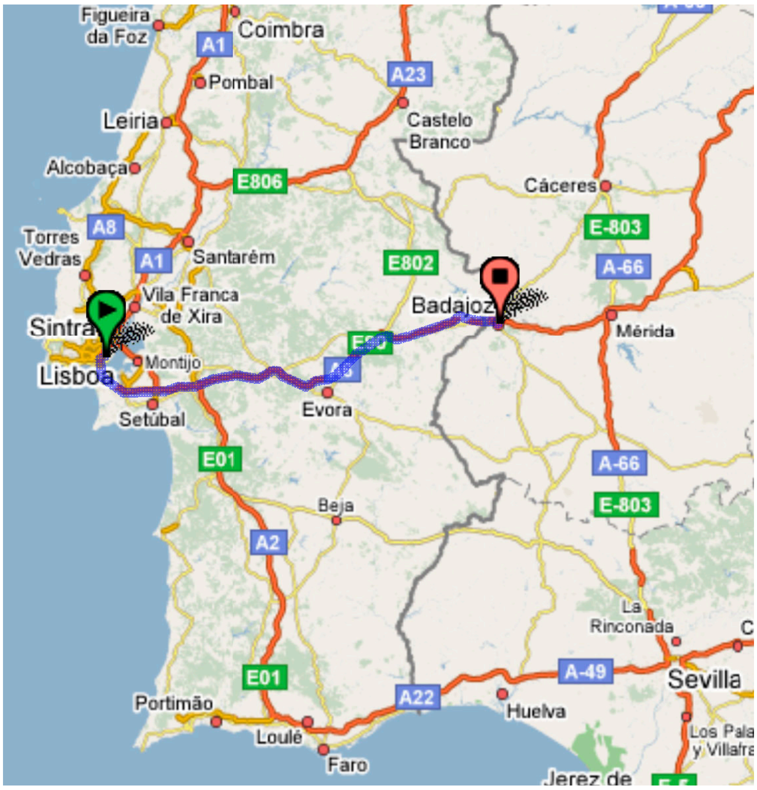
1.2.2. Terminadas as comparações possíveis, dois a dois, o Luís afirmou que ele próprio deveria ser considerado o vencedor global.

Numa pequena composição, justifique que este candidato está em condições de se considerar vencedor global, tendo em conta os resultados obtidos.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta a soma dos resultados referentes às contagens dos votos na comparação dos candidatos dois a dois, com a consequente ordenação dos candidatos.

2. O António vive em Lisboa e é vendedor de uma empresa nacional. Todas as semanas, parte de sua casa e vai visitar duas cidades portuguesas, Faro e Coimbra, a fim de dar assistência aos seus clientes. A partir da próxima semana, vai começar a dar também assistência a clientes de duas cidades espanholas, Sevilha e Cáceres. Está neste momento a organizar um plano do percurso pelas quatro cidades: partindo de sua casa, passa uma única vez por cada uma das quatro cidades e volta de novo a casa.

Pretende, também, percorrer o mínimo de quilómetros possível. Na tabela[1], estão referidas as distâncias, em quilómetros, entre aquelas cidades.



	Lisboa	Faro	Sevilha	Cáceres	Coimbra
Lisboa		282 *km*	459 *km*	313 *km*	206 *km*
Faro			197 *km*	442 *km*	447 *km*
Sevilha				260 *km*	625 *km*
Cáceres					346 *km*
Coimbra					

[1] Nota – O mapa e os valores das distâncias entre as cidades foram retirados do *site* http://maps.google.com/maps.

2.1. Desenhe um grafo ponderado que sirva de modelo às várias hipóteses de percurso possíveis. Como peso, atribua a cada aresta a distância, em quilómetros, a ela associada.

2.2. O António está convencido de que, se tiver de visitar, em primeiro lugar, o cliente de Coimbra, percorrendo depois as restantes cidades, antes do regresso a Lisboa, o percurso mais curto, nas condições a que está sujeito, consiste em seguir de Coimbra para Faro e só depois visitar as cidades espanholas, antes do regresso a Lisboa.

Numa composição, justifique se o António tem razão.

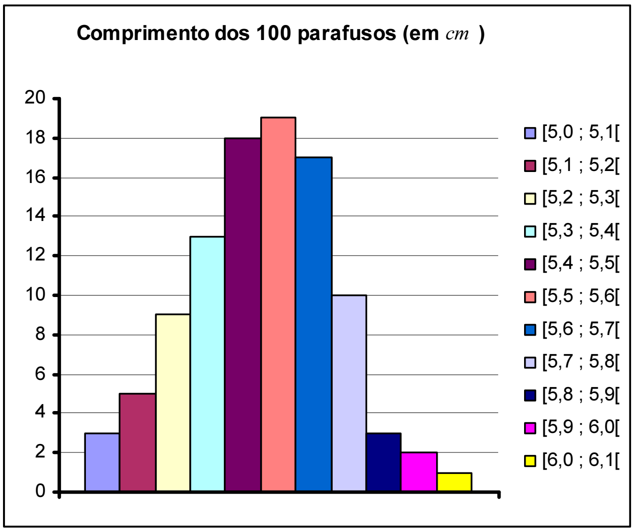
Deve incluir, obrigatoriamente, na sua composição:

- o número total de circuitos que obedecem aos critérios definidos;
- a identificação de todos os percursos possíveis, bem como a distância percorrida em cada um deles;
- a conclusão final, identificando o percurso de extensão mínima.

3. A secção de controlo de qualidade de uma fábrica de parafusos escolhe, aleatoriamente, uma amostra de 100 parafusos produzidos por uma determinada máquina e regista o comprimento dos parafusos seleccionados.

Na tabela seguinte, estão indicados os dados, agrupados, dos comprimentos dos parafusos da amostra, à esquerda do correspondente histograma.

Comprimento dos parafusos (em cm)	**Frequência Absoluta**
$[5{,}0\ ;\ 5{,}1[$	3
$[5{,}1\ ;\ 5{,}2[$	5
$[5{,}2\ ;\ 5{,}3[$	9
$[5{,}3\ ;\ 5{,}4[$	13
$[5{,}4\ ;\ 5{,}5[$	18
$[5{,}5\ ;\ 5{,}6[$	19
$[5{,}6\ ;\ 5{,}7[$	17
$[5{,}7\ ;\ 5{,}8[$	10
$[5{,}8\ ;\ 5{,}9[$	3
$[5{,}9\ ;\ 6{,}0[$	2
$[6{,}0\ ;\ 6{,}1[$	1
TOTAL	100



3.1. Qual é a variável associada à representação feita pelo histograma?

3.2. Determine, nesta amostra, a percentagem de parafusos cujo comprimento é inferior a $5{,}5\ cm$.

3.3. Calcule um valor aproximado para a média do comprimento dos parafusos da amostra seleccionada.

Nos cálculos intermédios, utilize **duas casas decimais**, apresentando o resultado final **arredondado às décimas.**

3.4. Os dados disponíveis para a construção do histograma indicam-nos as frequências absolutas dos comprimentos, distribuídos em intervalos de amplitude $0,1$. É costume aconselhar um número de classes que depende da dimensão da amostra e que, no caso presente, nos conduziria a 7 classes. Numa pequena composição, explique como procederia para obter o histograma correspondente ao mesmo conjunto de dados constituído apenas por 7 classes. Admita que o menor valor registado foi de $5,025\ cm$ e que o maior valor foi de $6,070\ cm$.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

- a amplitude de cada classe;
- os extremos das 7 classes que compõem o histograma;
- uma justificação da impossibilidade de associar a cada uma das classes construídas a respectiva frequência absoluta, face aos dados de que dispõe.

3.5. Neste item, utilize o resultado obtido em **3.3.** (caso não tenha resolvido o item **3.3.**, utilize como aproximação da média o valor $5,6\ cm$) e, tendo em atenção que um valor aproximado para a variância é $0,043\ cm^2$, obtenha um intervalo com uma confiança de 95% para o comprimento médio dos parafusos produzidos pela máquina.

Nos cálculos intermédios, utilize, pelo menos, **três casas decimais**; relativamente aos extremos do intervalo, apresente-os **arredondados às centésimas**.

3.6. Extraem-se dois parafusos, sem reposição, da amostra citada em **3**.
Qual é a probabilidade de se obterem dois parafusos de comprimento inferior a 5,6 cm?

Apresente o resultado final na forma de fracção**.**

FIM

Esta página não está impressa propositadamente

COTAÇÕES

1. .... **55 pontos**

1.1. .... 16 pontos

1.2. .... 39 pontos

1.2.1. .... 24 pontos

1.2.2. .... 15 pontos

2. .... **45 pontos**

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 25 pontos

3. .... **100 pontos**

3.1. .... 5 pontos

3.2. .... 10 pontos

3.3. .... 20 pontos

3.4. .... 20 pontos

3.5. .... 20 pontos

3.6. .... 25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

FORMULÁRIO

TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

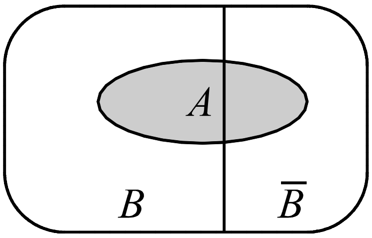
MODELOS DE GRAFOS

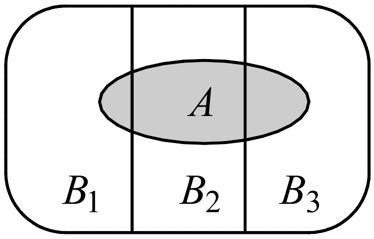
Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= P(B) \times P(A|B) \; + \; P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A|B_1) \; + \; P(B_2) \times P(A|B_2) \; + \; P(B_3) \times P(A|B_3)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) \; + \; P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

σ - desvio padrão da variável

z - valor relacionado com o nível de confiança $(*)$

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

s - desvio padrão amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança $(*)$

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\hat{p}$ - proporção amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança $(*)$

$(*)$ **Valores de z para os níveis de confiança mais usuais**

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$