EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Curso Científico-Humanístico
de Ciências Sociais e Humanas

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 9.

A prova inclui um formulário (páginas 10 e 11).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens em que é pedida a elaboração de uma composição, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação em língua portuguesa.

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. No dia 9 de Outubro de 2005, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Os dados apresentados no quadro seguinte dizem respeito às eleições para a Câmara Municipal de um certo concelho.

Total de eleitores inscritos: $141\,360$

Número de mandatos: 11

Partidos concorrentes: A, B, C, D, E e F

Os resultados provisórios das eleições para a Câmara Municipal desse concelho, divulgados pelo Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral (STAPE), pouco tempo depois do encerramento das urnas, foram os seguintes:

Número de votos brancos: $2\,225$
Número de votos nulos: $1\,550$

Partidos	A	B	C	D	E	F
Número de votos	28 799	17 437	11 959	4 785	948	340

1.1. Calcule a percentagem da abstenção, nestas eleições, para a referida Câmara Municipal. Apresente o resultado arredondado às unidades.

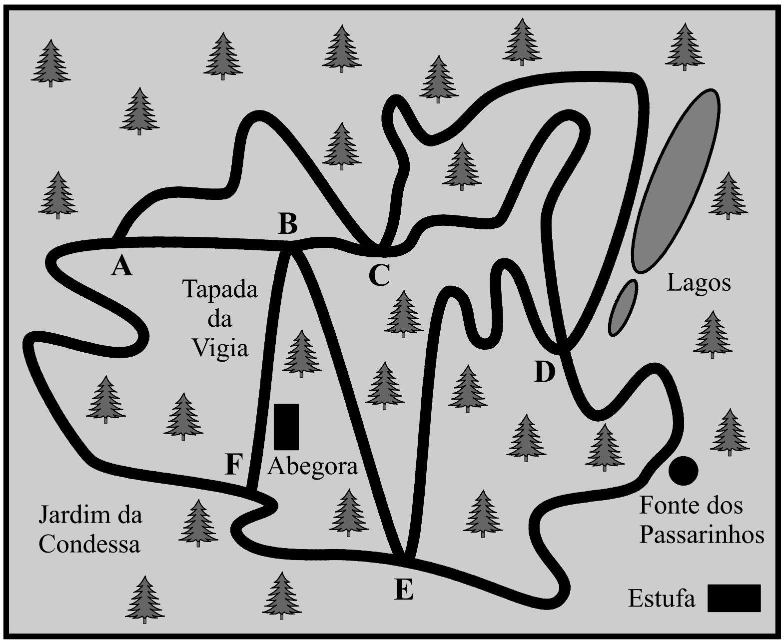
1.2. No dia 11 de Outubro, um jornal diário, referindo-se às eleições para a mesma Câmara Municipal, publicou uma notícia, na qual se podia ler:

O partido D vai exigir a recontagem dos votos, por considerar que persistem dúvidas quanto ao resultado oficial divulgado na noite de domingo. Por apenas 15 votos (...), o partido D não elegeu o seu cabeça-de-lista como vereador. (...) A eleição de um vereador do partido D alteraria a relação de forças no executivo dessa Câmara. (...) «<u>Era fundamental que o partido D estivesse representado, não só pela força que já tem, mas também porque obrigaria o presidente a dialogar com a oposição e a aprofundar a democracia e a pluralidade de ideias</u>», frisou o cabeça-de-lista do partido D.

Tendo em conta os resultados eleitorais, elabore uma composição na qual comente esta notícia. Na sua composição, deve:

- determinar o número de mandatos obtidos por cada força política, aplicando o método de Hondt (apresente os quocientes arredondados às décimas);
- explicar por que razão foi por 15 votos que o partido D não elegeu nenhum vereador e qual o partido que perderia um mandato se o partido D tivesse tido mais 15 votos (admitindo que os restantes partidos mantinham a sua votação);
- explicar o sentido da frase (acima sublinhada) do cabeça-de-lista do partido D, relacionando-a com o tipo de maioria (simples ou absoluta) obtida pela força vencedora e com o que teria acontecido, caso ele tivesse sido eleito.

2. Alguns visitantes menos civilizados do Parque da Pena, em Sintra, têm por hábito deitar para o chão sacos de plástico, paus de gelado, latas de refrigerante, etc.
Um grupo de jovens amantes da natureza decide, durante uma tarde, ajudar a recolher todo o lixo existente nos caminhos duma zona do Parque.
Na figura, está um mapa dessa zona do Parque da Pena. Os cruzamentos dos caminhos estão assinalados por letras, de **A** a **F**.



Admita que o grupo de jovens parte do ponto **A**, assinalado no mapa, percorre todos os caminhos assinalados, recolhendo o lixo, e regressa ao ponto **A**.

2.1. O grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez.
Justifique esta afirmação, começando por modelar, por meio de um grafo, o mapa da zona do Parque da Pena representado na figura.

2.2. Indique um percurso em que o número de caminhos percorridos mais do que uma vez seja o menor possível. Dê a sua resposta na forma de uma sequência de letras, de acordo com a sequência de cruzamentos do percurso por si escolhido.

2.3. Na obra de Joseph Malkevitch, *Modelos de Grafos*, pode ler-se: «*A ideia chave na modelação matemática consiste em tomar a situação original e simplificá-la de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original.*»

Elabore uma composição onde desenvolva a ideia expressa, nesta frase, por Joseph Malkevitch. Baseie-se no modelo que considerou nas alíneas anteriores ou num exemplo à sua escolha, que integre a utilização de grafos.

Nessa composição deve referir:
- o porquê da necessidade de simplificar a realidade;
- o porquê da necessidade de distinguir o essencial do acessório;
- os aspectos que foram simplificados, relativamente à situação original.

3. Com o objectivo de estudar o grau de informação dos cidadãos da União Europeia (UE) sobre as políticas e instituições da UE, uma empresa de sondagens realizou um inquérito no Outono de 1999.

A dimensão da amostra foi de 15 800 pessoas, escolhidas aleatoriamente entre os cidadãos da UE com 15 ou mais anos.

Perguntava-se aos inquiridos em que medida se sentiam informados sobre a UE, sendo a resposta dada mediante a selecção de um número, de 1 (não sabe nada) a 10 (sabe muito).

No quadro seguinte, apresentam-se os resultados desse inquérito.

Para cada nível, indica-se a percentagem de inquiridos que se auto-avaliaram nesse nível.

Escala	Percentagem
1	10
2	12
3	16
4	17
5	19
6	12
7	8
8	4
9	1
10	1

Auto-avaliação dos conhecimentos sobre questões da UE

3.1. Admita que os níveis 8, 9 e 10 correspondem a um elevado conhecimento sobre questões da UE.

Determine o número de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento sobre questões da UE.

3.2. Tendo em conta a tabela acima e com base nas respectivas definições, justifique que o primeiro quartil desta distribuição é 3 e que a mediana é 4.

3.3. Admita que:

- dos inquiridos que declararam não saber nada (nível 1), 20% são portugueses;
- dos inquiridos que se auto-avaliaram num nível superior a 1, 5% são portugueses.

Escolhido, ao acaso, um inquirido, constatou-se que era português.

Determine a probabilidade de ele se ter auto-avaliado com nível 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.4. Obtenha um intervalo, com uma confiança de 99%, para a proporção de cidadãos da UE, com 15 ou mais anos, que consideram não saber nada (nível 1) sobre as políticas e instituições da UE. Apresente os valores dos extremos do intervalo na forma de dízima, arredondados às milésimas.

3.5. Qualquer intervalo de confiança para uma proporção tem uma certa margem de erro.

Elabore uma composição na qual defina margem de erro de um intervalo de confiança e relacione a fórmula que dá o intervalo de confiança (em função da proporção amostral, da dimensão da amostra e do nível de confiança) com a seguinte questão: o que acontece à margem de erro, quando, mantendo a confiança, se aumenta a dimensão da amostra?

A sua composição deve incluir:

- a definição de margem de erro de um intervalo de confiança;

- uma simulação da variação da margem de erro de um intervalo de confiança, em função da dimensão da amostra, percorrendo as seguintes etapas:
  - considere, por exemplo, $\hat{p} = 0{,}5$ e $n = 100$ e obtenha um intervalo, com um nível de confiança de 95%, para a proporção p;
  - atribua diferentes valores a n e obtenha os respectivos intervalos de confiança;
  - descreva o que acontece à margem de erro do intervalo quando se aumenta a dimensão da amostra.

FIM

COTAÇÕES

1.	**50**
1.1.	10
1.2.	40
2.	**50**
2.1.	15
2.2.	15
2.3.	20
3.	**100**
3.1.	15
3.2.	20
3.3.	20
3.4.	20
3.5.	25
TOTAL	**200**

FORMULÁRIO

TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

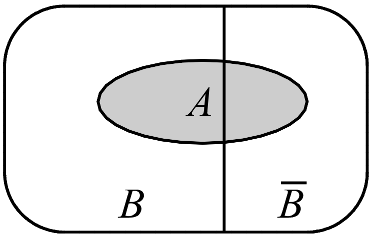
Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt
O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

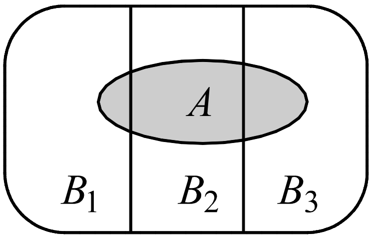
MODELOS DE GRAFOS

Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler
Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A|B) \; + \; P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A|B_1) \; + \; P(B_2) \times P(A|B_2) \; + \; P(B_3) \times P(A|B_3)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) \; + \; P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

σ - desvio padrão da variável

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

s - desvio padrão amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\hat{p}$ - proporção amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

($*$) **Valores de z para os níveis de confiança mais usuais**

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$